

JUAN CORRALES
MARTIN

CALCULO OPTIMO DE TRANSFORMADORES



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
BARCELONA



A



SAFARI
LITERATURE

JUAN CORRALES MARTÍN

Doctor Ingeniero Industrial y
Director de Industrias Eléctricas
Profesor de la
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de la
Escuela de Ingeniería Técnica Industrial de Barcelona
Ex Director Técnico de «LA ELECTRICIDAD, S. A.» de Sabadell

CÁLCULO ÓPTIMO DE TRANSFORMADORES

Edita: UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE BARCELONA
ETS Ingenieros Industriales de Barcelona
con la colaboración de
MARCOMBO, S. A., de Boixareu Editores
Avda. José Antonio, 594
Barcelona-7

Índice

© J. Corrales, 1978
U.P.B.
Reservados todos los derechos

Prólogo	7
1. Estudio económico general	11
1.1. Criterios de optimación	13
1.2. Precio de factura v de un transformador	14
1.3. Coste de explotación κ	17
1.3.1. Cálculo de las pérdidas anuales de energía w en el transformador. Expresión teórica	17
1.3.2. Utilización de la curva temporal de potencia aparente	18
1.3.3. Método de interpolación	21
1.3.4. Ejercicio 1	27
1.4. Capitalización κ de las pérdidas	29
1.4.1. Capitalización directa de las pérdidas totales de energía	30
1.4.2. Capitalización directa de las potencias de pérdidas en el hierro p_{Fe} y en el cobre p_{Cu}	31
1.4.3. Ejercicio 2	31
1.4.4. Primas y penalidades económicas sobre el rendimiento	32
1.4.5. Ejercicio 3	35
1.5. Coste financiero F del transformador	37
2. Optimación	39
2.1. Generalidades	41
2.2. Objeto	42
2.3. Ecuaciones fundamentales	43
2.3.1. Potencia aparente	43
2.3.2. Pérdidas en el hierro	46
2.3.3. Pérdidas en el cobre	48
2.3.4. Tensión de reactancia en % de la T.N.	50
2.4. Bases del cálculo	53

ISBN: 84-600-1026-0
Depósito legal: B. 46.699-1977
Impreso en España
Printed in Spain
T.G.I.-A.,S.A. - Calle H, s/n. (esquina Gran Capitán)
Sant Joan Despi (Barcelona)

2.5.	Valoraciones	57
2.5.1.	<i>Precios de facturación, capitalización de pérdidas y precio financiero</i>	57
2.5.2.	<i>Influencia de las dimensiones en los precios del transformador</i>	59
2.6.	Transformador de mínimo precio de venta	61
2.7.	Ejercicio 4. Transformador común	68
2.7.1.	<i>Dimensiones básicas del núcleo</i>	68
2.7.2.	<i>Dimensiones y coeficientes de trabajo</i>	68
2.7.3.	<i>Calculemos las constantes del transformador</i>	69
2.7.4.	<i>Pesos, pérdidas y precios del transformador</i>	71
2.7.5.	<i>Reactancia de cortocircuito</i>	71
2.8.	Ejercicio 5. Cálculo del transformador de mínimo precio de venta	72
2.8.1.	<i>Dimensiones del núcleo</i>	72
2.8.2.	<i>Pesos, pérdidas y precios del transformador</i>	73
2.8.3.	<i>Caída relativa de reactancia</i>	75
2.9.	Transformador de mínimo precio financiero (transformador óptimo)	76
2.10.	Ejercicio 6. Cálculo del transformador de mínimo precio financiero	77
2.10.1.	<i>Dimensiones óptimas del núcleo</i>	77
2.10.2.	<i>Pesos, pérdidas y precios</i>	78
2.10.3.	<i>Comprobemos finalmente la «caída de reactancia» del transformador óptimo</i>	79
2.11.	Resumen comparativo	80
3.	Apéndices	83
3.1.	Apéndice 1. Deducción de las fórmulas sobre la longitud de ventana L y el diámetro D óptimos	85
3.2.	Apéndice 2. Deducción de la ecuación cúbica en $\Lambda = D^4$..	86
3.3.	Apéndice 3. Análisis y solución de la cúbica	89
3.4.	Apéndice 4. Cálculo de las gráficas universales de optimación del diámetro del núcleo	90
3.4.1.	<i>Ecuación numérica del diámetro óptimo</i>	90
3.4.2.	<i>Gráfica para distintos valores de ρ_k</i>	91
3.5.	Apéndice 5. Cálculo de las gráficas universales de optimación de la longitud de ventana L_1	96
3.6.	Apéndice 6. Cálculo de los gráficos de optimación de la anchura de ventana «a»	97
3.7.	Apéndice 7. Cálculo de las curvas de dimensiones óptimas según la potencia del transformador. (Indicadoras)	98
	Bibliografía	101

Prólogo

Toda optimación requiere precisar claramente hacia qué cualidades va dirigida, así como la definición previa de estas mismas cualidades, tanto en el concepto como en su extensión.

Cuando se trata de un problema económico, habría que señalar de manera inequívoca si la característica que interesa analizar es un precio de compra o de venta, un coste de explotación o un resultado combinado de explotación y compra, o bien, en términos restringidos, si se trata de un proceso de manipulación, de almacenaje, de inmovilización de capital, etc. También debe fijarse el ámbito que abarca la estimación propuesta, que lo mismo puede ser una pieza suelta, un componente de cierto conjunto parcial, el conjunto parcial en sí, la máquina o aparato completo o el sistema donde el objeto se halle instalado.

Cada uno de estos criterios conducirá, en efecto, a través del proceso de optimación, a un resultado distinto, a veces contradictorio con cualquier otro, de lo cual surgen a menudo perplejidades y dudas respecto a la decisión a tomar e incluso soluciones contraproducentes que pueden desacreditar justamente la teoría restringida en que se asientan.

No hay que ignorar estas realidades, ya que tales resultados negativos, aparentemente bien fundados, se producen con desconcertante frecuencia, sobre todo en la dirección de los sistemas macroeconómicos, lo mismo empresariales que estatales, según nos muestra la observación cotidiana de los hechos.

Así vemos cómo, a veces, una gerencia se preocupa de evitar pequeñas deficiencias económicas o de otro orden a base de establecer una organización agobiante, confusa y paralizadora; o se implantan controles reiterativos para eliminar todo error posible y con ello suprimir el gasto de corrección o desperdicio, si bien a costa de multiplicar en mayor cuantía los desembolsos que acarrearán tales medidas precautorias. O bien nos encontramos en ocasiones con disposiciones administrativas de gran envergadura para salvar una

situación parcial incómoda, provocando con ello mayores trastornos económicos que los que se intenta remediar (soluciones «políticas»).

Claro es que, sin embargo, pese a todas estas decisiones equivocadas, el éxito «formal» queda siempre asegurado: basta con destacar los logros efectivos en el dominio parcial que se fijó como objetivo y silenciar todas las incidencias y repercusiones desfavorables que las medidas hayan podido tener sobre el resto del sistema.

No quisiéramos que al ofrecer en las páginas siguientes unos recursos de optimación sobre el problema de los transformadores, pudiéramos inducir a alguien a prescindir de todo análisis responsable y del uso adecuado de su sano juicio. La solución que brindamos no constituye una panacea en el sentido de optimación absoluta de los transformadores «dentro del Sistema» donde se hallen integrados, sino del transformador mismo considerado como un ente aislado, con sus propias cargas financieras, formadas por las partidas *de coste y de explotación*; y nada más. Preferimos advertirlo así ya desde ahora antes que entonar el consabido himno triunfal, tan frecuente en el terreno económico donde toda nueva teoría parece nacer predestinada a convertirse en la piedra filosofal.

El único proceso seguro para llegar a un óptimo indiscutible es el de englobar en el estudio al Sistema íntegro, pero esto tan evidente y tan sencillo de enunciar entraña, por lo general, tales dificultades de planteamiento y de método que obligan, a menudo, a renunciar al propósito. Lo que hay que vigilar, pues, a toda costa es que la adopción de una mejora parcial no redunde en perjuicio de otros elementos más influyentes sobre el resultado de conjunto.

Lo dicho se comprende muy fácilmente si analizamos, por ejemplo, un transformador, en el caso de que su solución económicamente óptima según los criterios más sensatos de partida, nos condujese a un aparato, pongamos por circunstancia extrema, con una tensión de reactancia despreciable. El coste de las protecciones de cortocircuito harían entonces ilusoria la economía lograda sobre el transformador considerado aisladamente.

La dificultad reside en plantear el problema en toda su amplitud con la diversidad de factores y escollos que pueden presentarse. El instrumento matemático necesario resulta verdaderamente formidable y en muchas ocasiones imposible de formular. Basta observar el que entra en juego aquí donde nuestras ambiciones se han ceñido al transformador mismo prescindiendo de las repercusiones económicas que pudiera tener en el resto del equipo.

A pesar de ello, no creemos superfluo este trabajo por cuanto, en muchos casos, tal será la verdadera situación del problema: escasa influencia económica de las variantes del aparato sobre las instalaciones complementarias; y en otros, el conocimiento de la solución óptima para el transformador constituirá sin duda una guía valiosa, que pueda evitar innecesarios desvíos sobre el mismo, por ignorancia, al perseguir la optimación de otros elementos o equipos parciales del Sistema. Todo ello, en tanto no se alcance a formular la verdadera solución óptima del conjunto.

Con objeto de facilitar el estudio a aquellos lectores interesados en él, que no estuvieren muy al corriente de los procesos de coste de fabricación y otros financieros, exponemos en el primer capítulo un breve resumen de los principios que nos han de servir de base para plantear a continuación el problema de optimación, propiamente dicha, de los transformadores. El lector familiarizado con aquellos temas puede prescindir, por lo tanto, de la primera parte.

Digamos, para terminar, que todo este estudio constituye una exposición ligeramente ampliada de un cursillo que el autor ha desarrollado por dos veces en el C.P.I. (Centro de Perfeccionamiento del Ingeniero) de la Asociación de Ingenieros Industriales en Barcelona, donde se expusieron por primera vez los resultados.

Barcelona, Diciembre de 1977

JUAN CORRALES

**Estudio económico
general**

1.1. Criterios de optimación

Según hicimos constar en el prólogo, la optimación de los transformadores ha de basarse sobre ciertos criterios que, por el momento, no alcanzan a ser los de su posición económica dentro del sistema general del cual forman parte, sino con respecto al aparato en sí, aunque en éste pueden incluirse tanto las características de fabricación como las condiciones de servicio.

Ceñidos a dichos límites, el transformador ha de considerarse optimado si responde, según las circunstancias del problema, a uno u otro de estos dos conceptos.

a) *Mínimo coste de adquisición.* Será válido siempre que el servicio quede reducido a cortos periodos de funcionamiento sin repercusión económica sobre el coste de explotación; por ejemplo: transformadores de arranque, de instalaciones de socorro, de punta, etc.

Como quiera que el precio de adquisición (precio de coste para el cliente y de venta para el fabricante) constituye en términos generales el precio de factura designaremos con este calificativo genérico el precio que acabamos de mencionar.

b) *Mínimo coste financial.* Entenderemos como tal el que resulte de tener en cuenta a la vez el precio de factura del transformador y el coste de explotación incluyendo en este último solamente el valor de las pérdidas de energía, lo que no implica desconocer la existencia de otros, sino admitir sencillamente que los de instalación y conservación son independientes de la calidad económica del transformador, hipótesis plenamente aceptable. El valor de la energía perdida será previamente capitalizado según se describe más adelante.

Vamos a puntualizar, pues, sobre estos precios procurando simplificar sus expresiones para introducirlas cómodamente en la formulación matemá-

tica de tal manera que permita proceder al estudio de la optimación económica.

En la valoración del transformador desde uno u otro punto de vista no se tiene en cuenta el rescate como desecho al final del periodo de amortización, ya que tratándose de problemas de optimación las constantes aditivas o sustractivas del precio pueden ser ignoradas.

1.2. Precio de factura v de un transformador

Con gran uniformidad dentro de una producción normalmente organizada, puede decirse que el precio de venta para cada tipo de producto es proporcional al peso de los distintos materiales que intervienen, afectado cada uno de éstos por un cierto coeficiente o precio de venta por kilo. En el precio de venta o de facturación así calculado son computables tanto el valor de los materiales mismos como el de la mano de obra directa, los gastos de fabricación imputables a la materia prima, los de mano de obra indirecta y cargas que arrastra la producción, los gastos generales e incluso los beneficios industrial y comercial.

Cuando se trata de transformadores, el material implicado a efectos del cálculo de los precios de facturación puede reducirse a las dos categorías de materias primas que constituyen los materiales activos, es decir, hierro (chapa magnética) y cobre, cargando sobre ellas proporcionalmente el de los restantes materiales integrados en el aparato.

Aún es más simple y no menos exacto el considerar, para el estudio económico comparativo, solamente los materiales activos citados en todo su proceso de fabricación y montaje lo que equivale a suponer independiente de la solución, óptima o no, el precio de los demás componentes. Así lo haremos en nuestro estudio aunque por razón de uniformidad sigamos llamando precio «de facturación» del transformador al que se desprende exclusivamente de aquellos dos tipos de materiales, es decir, al de la parte activa.

La expresión del precio de facturación basado, en los datos de la contabilidad industrial, se calcula entonces como sigue:

Sean, en general

C_M el coste en almacén de los materiales que integran un producto, en pesetas.

C_T el coste de la mano de obra directamente aplicada al producto, en pesetas. Esta cifra puede incluir ya las cargas proporcionales de los mismos salarios directos (cargas sociales, por ejemplo), reduciéndose en consonancia los gastos de fabricación a los que en seguida nos referiremos.

k_M el coeficiente de gastos de los materiales ($k_M > 1$) mediante el cual se computan anualmente como factor medio de carga sobre los mismos los gastos de gestión, almacenamiento y control de almacenes.

k_T el coeficiente de gastos de la mano de obra directa ($k_T > 1$). Tiene en cuenta el suplemento de coste que hay que aplicar al importe de aquella mano de obra invertida directamente en el producto, para cubrir los salarios y cargas del personal de fabricación asociado indirectamente a la producción: maestros de taller, aprendices, control burocrático y de organización de talleres, etc.

k_g el coeficiente de gastos generales de la empresa ($k_g > 1$) mediante el cual se contabilizan todos los demás gastos de gestión y servicio no imputables claramente a la materia prima o a la mano de obra directas: Dirección, departamentos técnicos generales, oficinas administrativas y comerciales, intereses, gastos de negociación, etc. A veces el valor de k_g se obtiene como el producto de otros tres coeficientes parciales resultantes por separado de los gastos financieros, de los gastos de comercialización y de los gastos generales propiamente dichos.

f_b el coeficiente de beneficio propuesto para el fabricado en cuestión. Tomándolo inferior a la unidad y aplicado como divisor del coste total, la diferencia $1 - f_b$ indica el beneficio bruto que deja el producto, expresado en fracción del precio de venta. Por ejemplo $f_b = 0,8$ significa un beneficio comercial del 20 % sobre este precio de venta. Con el simbolismo expuesto, el precio de facturación vendrá dado por

$$v = \frac{(C_M k_M + C_T k_T) k_g}{f_b} \quad [\text{ptas}]$$

Tanto k_M como k_T y k_g son parámetros de gestión en cada Empresa, revisables anualmente, al final de cada ejercicio; pero, de hecho, varían muy lentamente en el curso de los años e incluso sus valores suelen ser similares para empresas distintas de la misma naturaleza.

Si designamos por k_1 la relación entre el coste de la mano de obra directa C_T y el de los materiales C_M implicados en el producto,

$$k_1 = \frac{C_T}{C_M}$$

y por k_2 la de los coeficientes de gastos respectivos

$$k_2 = \frac{k_T}{k_M}$$

se podrá escribir, de otro modo,

$$\begin{aligned} v &= \frac{[C_M k_M + (k_1 C_M) (k_2 k_M)] k_g}{f_b} \\ &= C_M k_M \frac{(1 + k_1 k_2) k_g}{f_b} \quad [\text{ptas}] \end{aligned}$$

Los nuevos factores k_1 y k_2 son también parámetros de relación que conservan una constancia muy notable para cada tipo de producto y, en caso necesario, pueden revisarse periódicamente sin dificultad alguna. Así la expresión

$$\frac{(1 + k_1 k_2) k_g}{f_b} = K_v$$

constituye un parámetro global del precio de venta apenas variable en circunstancias bastante diferentes y, desde luego, fácilmente calculable en cualquier caso.

Tendremos, pues, como expresión final del precio de venta del producto

$$v = C_M k_M K_v \quad [\text{ptas}] \quad [1.2-1]$$

El valor en fábrica de las materias primas, C_M conviene ponerlo en función del peso de cada tipo a, b, \dots, i, \dots de material distinto: $G_a, G_b, \dots, G_i, \dots$ [kp] y de los precios unitarios respectivos $c_a, c_b, \dots, c_i, \dots$ [ptas/kp].

$$C_M = G_a c_a + G_b c_b + \dots + G_i c_i + \dots \quad [\text{ptas}]$$

Por las razones expuestas, los materiales a considerar en un transformador pueden reducirse al hierro del núcleo (chapa magnética) y al cobre de los bobinados, es decir, a los materiales activos cuyos pesos en kp y precios unitarios en ptas/kp representaremos por G_{Fe}, c_{Fe} y G_{Cu}, c_{Cu} según se trate de una u otra materia prima.

Así,

$$C_M = G_{Fe} c_{Fe} + G_{Cu} c_{Cu} \quad [\text{ptas}]$$

y sustituyendo en [1.2-1], el precio de facturación pasa a ser

$$\begin{aligned} v &= C_M k_M K_v = (G_{Fe} c_{Fe} + G_{Cu} c_{Cu}) k_M K_v \\ &= \boxed{\varphi_{Fe} G_{Fe} + \varphi_{Cu} G_{Cu}} \quad [\text{ptas}] \end{aligned} \quad [1.2-2]$$

donde

$$\varphi_{Fe} = c_{Fe} k_M K_v \quad [\text{ptas/kp}] \quad \text{y} \quad \varphi_{Cu} = c_{Cu} k_M K_v \quad [\text{ptas/kp}]$$

son otros tantos parámetros que nos indican los precios unitarios de facturación en ptas/kp a los que resultan el núcleo y los bobinados del transformador completamente terminado.

Ambas cifras son fáciles de obtener y se conocen normalmente en cualquier fábrica o departamento de transformadores a través de la contabilidad industrial. Sus valores son bastante consistentes incluso para talleres de muy distinta estructura.

Nos valdremos de la ecuación [1.2-2] como base de la optimación del precio de facturación.

1.3. Coste de explotación \approx

Se entenderá como tal el importe anual, capitalizado, de las pérdidas de energía en el transformador.

Según el proceso general de cálculo, la determinación del coste propuesto requerirá en primer lugar la evaluación de las pérdidas energéticas w [kWh] del transformador, por año; aplicando a estas pérdidas el precio de coste unitario c_w [ptas/kWh] a que resulte la energía en el punto donde se haya de instalar el transformador, tendremos el coste anual ($c_w w$) de las pérdidas en pesetas. Esta anualidad satisfecha durante toda la vida del transformador, es decir, a lo largo del periodo de amortización τ [años] del aparato, se traduce conforme a la tasa o interés del dinero, y mediante un factor de capitalización y [ptas/ptas] en el «valor presente» o valor de capitalización de las pérdidas, lo que constituye precisamente el coste de explotación que tratamos de calcular.

Recordemos que, a todos los efectos, las pérdidas de potencia computables en un transformador se reducen a las pérdidas fijas en el hierro p_{Fe} [kW] independientes de la carga y a las pérdidas variables en el cobre, p_{Cu} [kW] proporcionales al cuadrado de la intensidad en los devanados y, por tanto, al cuadrado de la potencia aparente instantánea S consumida a través del transformador.

Exponemos a continuación los detalles del proceso de cálculo mencionado.

1.3.1. Cálculo de las pérdidas anuales de energía w en el transformador. Expresión teórica

Si pudiéramos representar gráficamente la potencia perdida en cada instante en función del tiempo $p(t)$ a lo largo de un periodo anual completo T , la energía de pérdidas por año ascendería evidentemente a (figura 1.3.1)

$$w = \int_0^T p \cdot dt = \text{Superficie rayada} \quad [1.3-1]$$

[p en kW, t en horas, w en kWh]

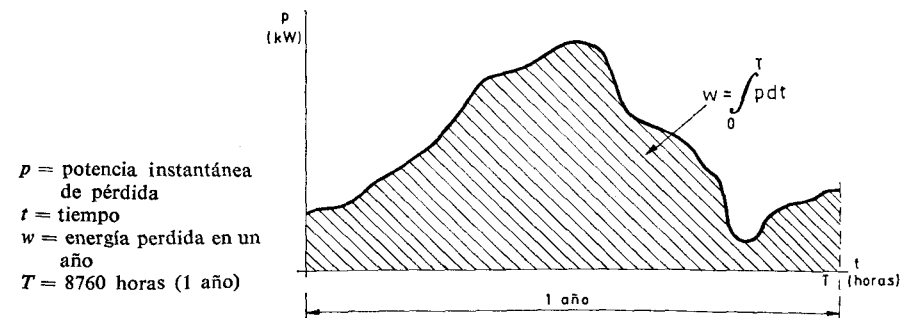


Fig. 1.3.1. Curva anual de pérdidas de potencia en el transformador.

Se comprende que el trazado previo de esta curva sería sumamente laborioso y casi siempre imprevisible, por lo cual no puede servir más que como base teórica de expresión.

Tampoco pueden proporcionarla los instrumentos registradores incapaces de medir directamente las pérdidas de potencia, suponiendo en el mejor caso que el transformador tuviese que sustituir a otro cuyas características de consumo hubieran sido registradas. No obstante, si se hubiese previsto un contador en el lado primario y otro en el secundario, la diferencia entre sus indicaciones anuales nos daría inmediatamente las pérdidas anuales del transformador.

Lo más que cabría hacer, si no se dispusiese de otros recursos, es calcular esta característica para un día medio en el curso de un año y multiplicar el resultado, en cuanto a la energía perdida, por el número de días anuales de servicio.

De cualquier modo, este método implica un trabajo excesivo y no resulta práctico en absoluto.

1.3.2. Utilización de la curva temporal de potencia aparente

Las pérdidas de energía en el hierro, por año w_{Fe} son fáciles de calcular: basta conocer la potencia de pérdidas fijas p_{Fe} y multiplicarlas por el tiempo T_{Fe} que el transformador permanezca anualmente en servicio.

$$w_{Fe} = p_{Fe} T_{Fe}$$

[p_{Fe} en kW, T_{Fe} en horas, w_{Fe} en kWh]

La dificultad reside siempre en evaluar las pérdidas anuales de energía en el cobre, w_{Cu} variables con la carga.

Se puede elaborar un diagrama medio de carga diaria a base de prever la curva de potencia aparente instantánea en días típicos, o por medio del registro amperimétrico diario o periódico de la curva de consumo, según las circunstancias del transformador en estudio; ya sea que vaya destinado a una nueva red de servicio previsible o bien a una red existente de servicio conocido. Al promediar curvas de carga en días diferentes hay que tener en cuenta (aparte de la ponderación de cada una de ellas según el número de días previstos) el carácter cuadrático de las pérdidas en el cobre, por lo cual la ponderación y promedio deberán efectuarse sobre las curvas respectivas, supuestas o medidas, tras haber elevado previamente al cuadrado las intensidades I o las potencias aparentes instantáneas S .

Si por uno u otro procedimiento se llega a trazar la curva media de consumo por jornada, en A o kVA instantáneos según la hora del día (figura 1.3.2-a) se podrá calcular la energía de pérdidas anuales en el cobre procediendo como sigue.

a) Se sustituye la curva continua por otra escalonada, prácticamente equivalente, cuyas ordenadas (potencias aparentes) varíen de 10 en 10 por 100 de la potencia nominal S_n del transformador, graduando, así, en valores relativos S/S_n el citado eje de ordenadas (figura 1.3.2-b).

b) Se convierte esta curva en un histograma de frecuencias de carga, (figura 1.3.2-c) con los valores de la carga relativa S/S_n en abscisas y la duración anual de cada una de estas cargas, en ordenadas. La duración diaria de las diversas cargas relativas se deduce de la línea escalonada anterior (figura 1.3.2-b) sumando todas las horas que como segmentos de abscisas

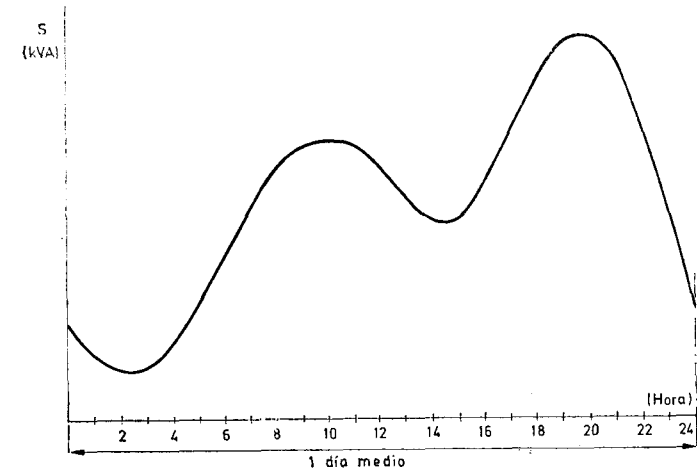


Fig. 1.3.2-a). Curva media de carga aparente instantánea (kVA) a lo largo de una jornada de servicio (24 horas).

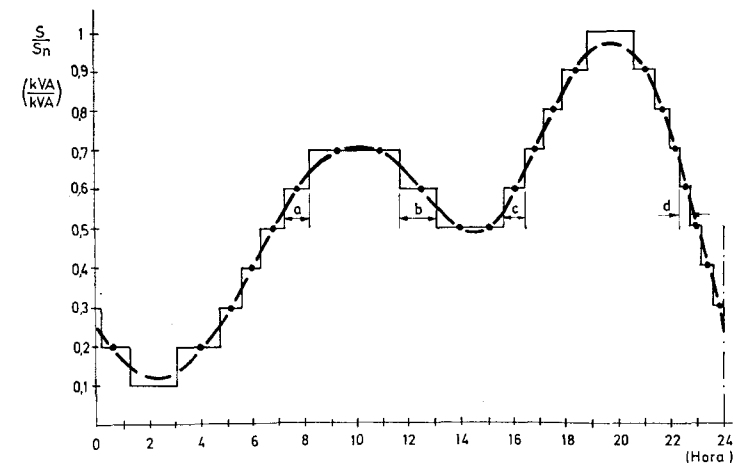


Fig. 1.3.2-b). Sustitución de la curva continua de la figura 1.3.2-a) por otra escalonada en valores relativos, de la potencia aparente.

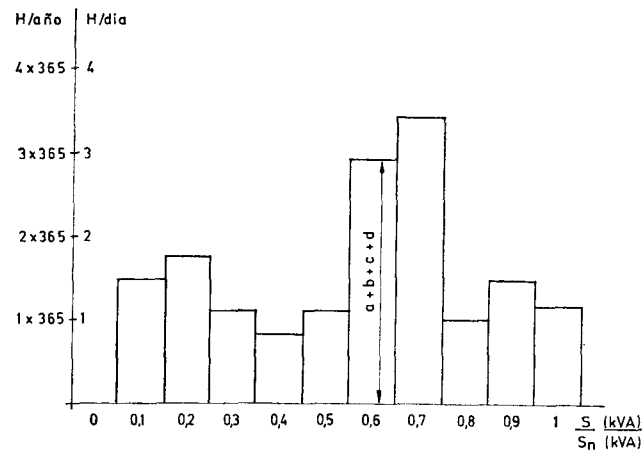


Fig. 1.3.2-c). Histograma de frecuencias diarias y anuales de carga.

corresponden a cada escalón de la misma altura, es decir, del mismo valor fraccional. El número de horas anuales durante las cuales se produce dicha carga se obtiene multiplicando la cifra diaria en horas por los 365 días del año.

c) Si designamos por

w_{Cu} las pérdidas de energía por año en el cobre

p_{Cu} la potencia de pérdidas en el cobre a P.C.

$t_1, t_{0,9}, t_{0,8}, \dots, t_{0,1}, t_0$, las horas anuales de las respectivas cargas relativas señaladas éstas por la fracción que marca el subíndice y por T_{Cu} el tiempo equivalente durante el cual se producirían, si el transformador trabajase continuamente a P.C., las mismas pérdidas de energía anuales en el cobre que en servicio real, tendremos, ya que las pérdidas instantáneas por efecto Joule son proporcionales al cuadrado de la corriente de carga o, lo que viene a ser igual, al cuadrado de la potencia aparente de servicio,

$$\begin{aligned} w_{Cu} &= p_{Cu} (t_1 + 0,9^2 t_{0,9} + 0,8^2 t_{0,8} + \dots + 0,1^2 t_{0,1}) \\ &= p_{Cu} (t_1 + 0,81 t_{0,9} + 0,64 t_{0,8} + \dots + 0,01 t_{0,1}) \\ &= p_{Cu} T_{Cu} \text{ [kWh/año]} \end{aligned}$$

de donde, el tiempo equivalente durante el cual se producirían trabajando a P.C. las mismas pérdidas de energía anuales en el cobre,

$$T_{Cu} = \frac{w_{Cu}}{p_{Cu}} = t_1 + 0,81 t_{0,9} + 0,64 t_{0,8} + \dots + 0,01 t_{0,1} \text{ [horas]} \quad [1.3-2]$$

La energía perdida por año en el transformador asciende, pues, a

$$W = w_{Fe} + w_{Cu} = p_{Fe} T_{Fe} + p_{Cu} T_{Cu} \text{ [kWh/año]} \quad [1.3-3]$$

[w, w_{Fe}, w_{Cu} en kWh; p_{Fe}, p_{Cu} en kW; $T_{Fe}, T_{Cu}, t_1, t_{0,9}, t_{0,8}, \dots, t_{0,1}$ en horas anuales]

1.3.3. Método de interpolación

La aplicación de la fórmula [1.3-3]

$$w = w_{Fe} + w_{Cu} = p_{Fe} T_{Fe} + p_{Cu} T_{Cu}$$

ofrece siempre la dificultad de evaluar T_{Cu} , ya que el tiempo equivalente para las pérdidas de energía en el cobre depende del régimen de carga, difícil de prever y lento en su registro y evaluación aun referido, como procedimiento más aceptable, a un día medio representativo. En este proceso es inevitable introducir hipótesis y simplificaciones que provocan forzosamente errores apreciables pese a la lentitud que impone el largo trabajo a realizar.

Por todo ello, no resulta mucho menos exacto el método que vamos a exponer cuya elaboración exige en cambio un esfuerzo considerablemente menor, ya que requiere simplemente el conocimiento del llamado factor de carga f_c definido como la relación de la potencia aparente media anual de consumo \bar{S} a la potencia aparente nominal S_n del transformador

$$f_c = \frac{\bar{S}}{S_n} \quad [1.3-4]$$

f_c es también, en otros términos, la relación entre las «horas de utilización» anuales del transformador H_u y las horas del año (8760), entendiéndose como H_u el número de horas de servicio que hubieran bastado para suministrar toda la energía aparente de consumo anual en kVAh si éste se hubiera efectuado con la potencia aparente de P.C. S_n

$$f_c = \frac{H_u}{8760} \quad [1.3-5]$$

o también, de consecuencia, la relación entre la citada energía aparente consumida (kVAh)_u y la que se hubiera podido producir con la potencia aparente nominal del transformador (kVAh)_n = $S_n \cdot 8760$ durante el mismo periodo anual

$$f_c = \frac{(\text{kVAh})_u}{(\text{kVAh})_n} = \frac{(\text{kVAh})_u}{8760 \cdot S_n} \quad [1.3-6]$$

Así, por ejemplo, una utilización anual H_u de 3000 horas en un transformador de 2000 kVA implica un factor de carga

$$f_c = \frac{H_u}{8760} = \frac{3000}{8760} = 0,343$$

o, idénticamente, una relación de energías aparentes

$$\frac{(kVAh)_u}{S_n \cdot 8760} = \frac{2000 [kVA] \times 3000 [h]}{2000 [kVA] \times 8760 [h]} = \frac{6 \times 10^6 [kVAh]}{17,52 \times 10^6 [kVAh]} = 0,343$$

equivalentes a una relación igual de potencias aparentes media y nominal respectivamente:

$$\bar{S} = \frac{6 \times 10^6 [kVAh]}{8760 [h]} = 686 [kVA]$$

y

$$S_n = 2000 [kVA];$$

$$f_c = \frac{686}{2000} = 0,343$$

El valor de f_c es una cifra que depende del sector donde vaya a instalarse el transformador (doméstico, industrial, rural, mixto, etc.), pero resulta bastante uniforme para cada servicio citado y constituye a veces el único dato disponible sobre el régimen temporal de la carga, dato que se establece por referencia con otros sectores de la misma naturaleza.

La esencia del método que denominamos «de interpolación» consiste, una vez conocido el factor de carga f_c , en tomar como tiempo equivalente para las pérdidas de energía en el cobre el que se desprende de la media aritmética proporcionada por los respectivos tiempos T'_{Cu} y T''_{Cu} en dos condiciones límites de servicio, a saber:

a) Con la carga a potencia aparente nominal S_n concentrada en el número de horas de utilización H_u . Tiempo equivalente: T'_{Cu} .

b) Con la carga a potencia aparente media \bar{S} distribuida uniformemente a lo largo del año: 8760 horas. Tiempo equivalente: T''_{Cu} .

a) Carga concentrada

La figura 1.3.3-a muestra en este caso el diagrama anual de carga. Supuesto suministrado el consumo íntegro de energía a potencia S_n nominal, T'_{Cu} es el tiempo anual de funcionamiento a P.C. durante el cual se producen, pues, las pérdidas en el cobre a razón de los p_{Cu} kW de potencia.

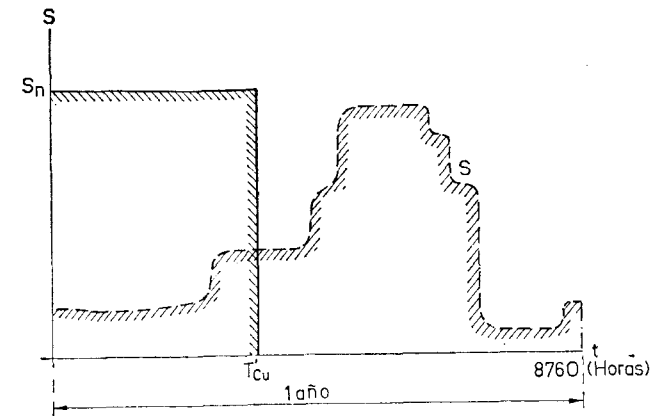


Fig. 1.3.3-a). Gráfico de carga aparente concentrada.

Como por definición de potencia media aparente \bar{S} a lo largo del año (8760 h) es

$$\bar{S} \times 8760 = S_n \times T'_{Cu}$$

se deduce (ver también [1.3-4])

$$T'_{Cu} = \frac{\bar{S}}{S_n} 8760 = f_c \times 8760 \text{ [horas]} \quad [1.3-7]$$

Las pérdidas de energía anuales en el hierro (fig. 1.3.3-b) valdrían en cualquier caso

$$w_{Fe} = p_{Fe} T_{Fe} \quad [1.3-8]$$

Sustituyendo [1.3-7] y [1.3-8] en [1.3-3]

$$w = w_{Fe} + w_{Cu} = p_{Fe} T_{Fe} + p_{Cu} (f_c \times 8760) \quad [1.3-9]$$

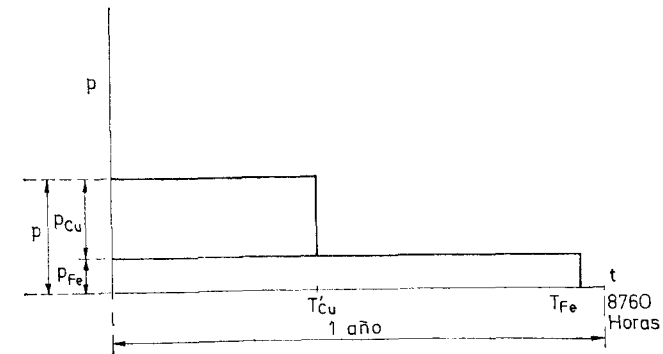


Fig. 1.3.3-b). Carga concentrada. Gráfico de pérdidas.

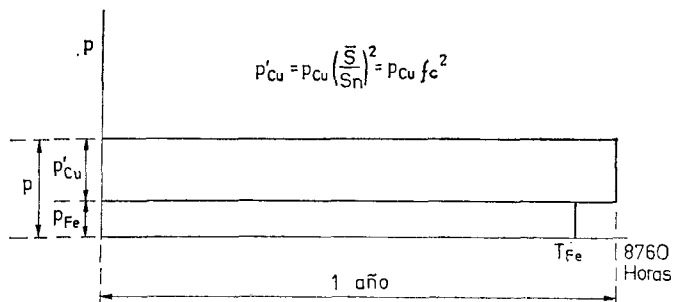


Fig. 1.3.3-d). Carga uniformemente distribuida. Gráfico de pérdidas.

De acuerdo con esto, la ecuación [1.3-3] de las pérdidas totales en el transformador en kWh por año, pasa a ser, dado el tipo de carga imaginado, y a la vista de [1.3-13] y [1.3-14],

$$w = w_{Fe} + w_{Cu} = p'_{Fe} \times 8760 + p'_{Cu} \times 8760$$

$$= p_{Fe} T_{Fe} + (p_{Cu} f_c^2) 8760 \quad [1.3-15]$$

De nuevo, en valores relativos, dividiendo uno y otro miembro por [1.3-10], $(kVAh)_n = 8760 S_n$,

$$\frac{w}{(kVAh)_n} = \frac{8760 \cdot p_{Fe} \frac{T_{Fe}}{8760} + p_{Cu} f_c^2 \cdot 8760}{8760 S_n}$$

es decir,

$$\boxed{w^* = p_{Fe}^* T_{Fe}^* + p_{Cu}^* f_c^2} \quad [1.3-16]$$

Tal es la réplica de la fórmula [1.3-12] que conviene al caso presente de una carga uniformemente distribuida.

c) Interpolación

Entre los dos supuestos límites de carga nominal S_n absolutamente concentrada y de carga media \bar{S} distribuida con absoluta uniformidad a lo largo del año, la carga real seguirá, sin duda, un curso intermedio variable, ajustado desde luego al coeficiente de carga f_c ; es decir, las pérdidas de energía por año w habrán de hallarse comprendidas forzosamente entre las que se desprenden de las ecuaciones [1.3-9] y [1.3-15] en valores absolutos

$$w = p_{Fe} T_{Fe} + 8760 f_c p_{Cu}$$

y

$$w = p_{Fe} T_{Fe} + 8760 f_c^2 p_{Cu}$$

o de las [1.3-12] y [1.3-16] en valores relativos

$$w^* = p_{Fe}^* T_{Fe}^* + f_c^* p_{Cu}^*$$

y

$$w^* = p_{Fe}^* T_{Fe}^* + f_c^2 p_{Cu}^*$$

Aceptemos como generales los resultados de promediar aritméticamente ambas cifras de pérdidas. Tendremos entonces

$$\boxed{w} = p_{Fe} T_{Fe} + 8760 \frac{f_c + f_c^2}{2} p_{Cu} = \boxed{p_{Fe} T_{Fe} + p_{Cu} T_{Cu}} \quad [1.3-17]$$

$$\boxed{w^*} = p_{Fe}^* T_{Fe}^* + \frac{f_c + f_c^2}{2} p_{Cu}^* = \boxed{p_{Fe}^* T_{Fe}^* + p_{Cu}^* T_{Cu}^*} \quad [1.3-18]$$

Comparando la primera de estas dos fórmulas con la expresión general [1.3-3] de las pérdidas anuales

$$w = p_{Fe} T_{Fe} + p_{Cu} T_{Cu}$$

se deduce que el método de interpolación nos conduce a un número de horas equivalentes T_{Cu} para las pérdidas en el cobre

$$\boxed{T_{Cu}} = \boxed{8760 \frac{f_c + f_c^2}{2}} \quad [\text{horas}] \quad [1.3-19]$$

Referidas T_{Cu} a las horas del año,

$$\boxed{T_{Cu}^*} = \frac{T_{Cu}}{8760} = \frac{f_c + f_c^2}{2} \quad [1.3-20]$$

1.3.4. Ejercicio 1

Calcular las pérdidas anuales de energía en un transformador de $S_n = 2000$ kVA potencia aparente nominal, 30 000 ● 5%/440 – 231 V tensiones nominales, cuyas pérdidas de potencia en el hierro a estas tensiones y en el cobre a P.C. ascienden respectivamente a $p_{Fe} = 4050$ W y $p_{Cu} = 18 100$ W.

Tiempo anual de servicio $T_{Fe} = 8760$ horas (1 año completo).

Tiempos parciales de carga previstos, según la tabla siguiente:

(1)	(2)	(3)	(2) × (3)
% de P.C.	Pot. (kVA)	Horas/año	Energía aparente (kVAh) suministrada
0	0	$t_{0,0} = 0$	0
10	200	$t_{0,1} = 3500$	700 000
20	400	$t_{0,2} = 850$	340 000
30	600	$t_{0,3} = 500$	300 000
40	800	$t_{0,4} = 450$	360 000
50	1000	$t_{0,5} = 1300$	1 300 000
60	1200	$t_{0,6} = 500$	600 000
70	1400	$t_{0,7} = 700$	980 000
80	1600	$t_{0,8} = 250$	400 000
90	1800	$t_{0,9} = 180$	324 000
100	2000	$t_{1,0} = 530$	1 060 000
	Sumas	8760	6 360 000 = (kVAh) _u

a) Por el gráfico de potencias aparentes de servicio

El tiempo de conexión T_{Fe} para las pérdidas en el hierro es en este caso el periodo anual íntegro

$$T_{Fe} = 8760 \text{ horas}$$

con las consiguientes pérdidas fijas de potencia

$$p_{Fe} = 4,05 \text{ kW}$$

El tiempo equivalente de carga T_{Cu} para las pérdidas en el cobre según [1.3-2],

$$\begin{aligned} T_{Cu} &= t_{1,0} + 0,81 t_{0,9} + 0,64 t_{0,8} + \dots + 0,01 t_{0,1} = \\ &= 530 + 0,81 \times 180 + 0,64 \times 250 + 0,49 \times 700 + 0,36 \times 500 + \\ &+ 0,25 \times 1300 + 0,16 \times 450 + 0,09 \times 500 + 0,04 \times 850 + 0,01 \times 3500 = \\ &= 530 + 146 + 160 + 343 + 180 + 325 + 72 + 45 + 34 + 35 = \\ &= 1870 \text{ horas} \end{aligned}$$

(21,3 % del periodo anual de 8760 horas).

Las pérdidas de energía en el transformador, por año, resultan ser así [1.3-3]

$$\begin{aligned} w &= w_{Fe} + w_{Cu} = p_{Fe} T_{Fe} + p_{Cu} T_{Cu} \\ &= 4,05 \times 8760 + 18,1 \times 1870 \\ &= 35,5 \times 10^3 + 33,8 \times 10^3 \\ &= 69,3 \times 10^3 \text{ kWh} \end{aligned}$$

b) Por el método de interpolación

De la tabla anterior de servicio se deduce:
Potencia aparente media de carga

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{\text{Energía aparente de servicio por año}}{\text{Horas del año}} = \frac{(\text{kVAh})_u}{8760} \\ &= \frac{6\,360\,000}{8760} = 726 \text{ kVA medios} \end{aligned}$$

Factor de carga [1.3-4]

$$f_c = \frac{\bar{S}}{S_n} = \frac{726}{2000} = 0,363$$

Pérdidas de energía por año [1.3-17]

$$\begin{aligned} w &= p_{Fe} T_{Fe} + 8760 \frac{f_c + f_c^2}{2} p_{Cu} \\ &= 4,05 \times 8760 + 8760 \frac{0,363 + 0,363^2}{2} 18,1 \\ &= 35,5 \times 10^3 + 39,2 \times 10^3 \\ &= 74,7 \times 10^3 \text{ kWh} \end{aligned}$$

En relación con el valor antes hallado deducido de la curva de carga $69,3 \times 10^3 \text{ kWh}$, resulta para el segundo método una diferencia por exceso del 8 %.

1.4. Capitalización α de las pérdidas

Siguiendo el proceso marcado en el párrafo 1.3, a la evaluación de las pérdidas anuales de energía w en el transformador ha de seguir la capitalización de su importe en pesetas, es decir, la determinación del valor presente que representa la anualidad A de gasto por dichas pérdidas, satisfecha du-

rante todo el periodo de vida o de amortización τ del transformador en cuestión.

1.4.1. Capitalización directa de las pérdidas totales de energía

Conocido el montante anual de las mismas w en kWh y el precio c_w a que resulta la energía en ptas/kVh en el punto donde se halla instalado el transformador, el valor de las pérdidas o anualidad A que ello implica, en pesetas, será

$$A = w c_w \text{ [ptas]}$$

La capitalización \varkappa o valor presente de una anualidad A vertida durante los τ años previstos para la amortización del transformador se obtiene multiplicando dicha anualidad A por el factor de capitalización y o valor presente que equivale al desembolso de una peseta cada año en el curso de los τ años, teniendo en cuenta el interés r en % del dinero

$$\varkappa = yA = y(c_w w) \text{ [ptas]} \quad [1.4-1]$$

El factor y viene dado por la expresión

$$y = \frac{100}{r} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^\tau} \right] \text{ [peseta presente/peseta anual]} \quad [1.4-2]$$

y puede hallarse directamente en las tablas financieras en función de r y τ . La figura 1.4.1-a da también resuelto gráficamente el problema de averiguar y en función de r y τ .

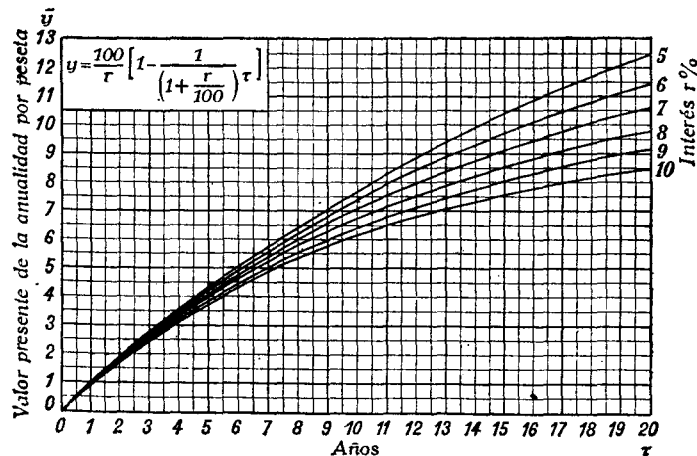


Fig. 1.4.1-a. Factor de capitalización de una anualidad fija.

1.4.2. Capitalización directa de las potencias de pérdidas en el hierro p_{Fe} y en el cobre p_{Cu}

Quando se conoce o se prevé el ciclo de servicio del transformador, lo cual permite hallar, como hemos visto, el tiempo T_{Fe} de conexión o de pérdidas en el hierro y el tiempo equivalente T_{Cu} de pérdidas en el cobre a P.C., puede elaborarse una fórmula binomia de capitalización, muy útil, que es el método más empleado para deducir el valor presente de tales pérdidas.

En efecto: dadas las pérdidas respectivas de potencia p_{Fe} y p_{Cu} (kW) y los tiempos anuales, de servicio T_{Fe} y equivalentes de P.C. T_{Cu} (horas), la energía total perdida por año asciende a

$$w = p_{Fe} T_{Fe} + p_{Cu} T_{Cu} \text{ [kWh]}$$

que al precio de c_w pesetas por kWh dan una anualidad

$$A = c_w (p_{Fe} T_{Fe} + p_{Cu} T_{Cu}) \text{ [ptas]}$$

y siendo y el factor de capitalización, conducen a un valor presente de dicha anualidad

$$\varkappa = y c_w (p_{Fe} T_{Fe} + p_{Cu} T_{Cu}) \text{ [ptas]}$$

que puede escribirse

$$\varkappa = \psi_{Fe} p_{Fe} + \psi_{Cu} p_{Cu} \text{ [ptas]} \quad [1.4-3]$$

con

$$\psi_{Fe} = y c_w T_{Fe} \quad [1.4-4]$$

y

$$\psi_{Cu} = y c_w T_{Cu} \quad [1.4-5]$$

como factores independientes de capitalización en pesetas/kW de pérdidas para el hierro y para el cobre. Se ve que

$$\frac{\psi_{Fe}}{\psi_{Cu}} = \frac{T_{Fe}}{T_{Cu}} \quad [1.4-6]$$

1.4.3. Ejercicio 2

Los transformadores de distribución de una cierta zona se hallan sujetos a un régimen de servicio que puede caracterizarse por un tiempo de conexión íntegro durante todo el año ($T_{Fe} = 8760$ horas) y un tiempo equivalente de pérdidas en el cobre $T_{Cu} = 2300$ horas. Contando con el precio de la energía $c_w = 0,60$ ptas/kWh y un periodo de amortización de 20 años al interés del dinero $r = 10\%$ deducir la fórmula binomia de capitalización.

Para $r = 10 \%$ y $\tau = 20$ años, el factor de capitalización y vale 8,5 (figura 1.4.1-a). Luego [1.4-4] y [1.4-5]

$$\psi_{Fe} = y c_{10} T_{Fe} = 8,50 \times 0,60 \times 8760 = 44\ 600 \text{ ptas/kW de pérdida en el hierro}$$

$$\psi_{Cu} = y c_{10} T_{Cu} = 44\ 600 \frac{2300}{8760} = 11\ 750 \text{ ptas/kW de pérdida en el cobre}$$

La fórmula de capitalización de pérdidas de potencia sería, pues [1.4-3],

$$\kappa = \psi_{Fe} p_{Fe} + \psi_{Cu} p_{Cu} = 44\ 600 p_{Fe} + 11\ 750 p_{Cu} \text{ ptas}$$

UNESA tiene establecida en el momento actual la siguiente fórmula

$$\kappa = 45\ 000 p_{Fe} + 12\ 000 p_{Cu} \text{ ptas.}$$

1.4.4. Primas y penalidades económicas sobre el rendimiento

Con el fin de completar este resumen económico expondremos también la manera de enjuiciar la calidad de un transformador en función del rendimiento, atribuyendo a esta cifra un valor adecuado de explotación de tal modo que las desviaciones sobre el rendimiento en cuestión ofrecido por el constructor se traduzcan en una prima o en una penalidad a sumar o a deducir del precio de facturación convenido, en la misma cuantía que tal desviación pudiera afectar a los intereses del usuario.

La cifra de corrección se suele establecer en «pesetas por punto» de desviación del rendimiento a P.C. y $\cos \varphi$ nominales con respecto al valor garantizado, entendiéndose como *un punto* la unidad de segundo orden decimal (la centésima) en la expresión normal del rendimiento como simple fracción o relación entre las potencias útil y absorbida, para las condiciones citadas de P.C. y $\cos \varphi$ nominales. Así, por ejemplo, un transformador con rendimiento de 0,97 tiene dos puntos más que otro de 0,95.

El calcular correctamente la prima o penalidad por punto que debe estipularse requiere conocer también los factores individuales de capitalización respectivos ψ_{Fe} y ψ_{Cu} para las pérdidas de potencia en el hierro y en el cobre y la distribución del exceso o defecto total de pérdidas entre las unas y las otras. En ausencia de este dato cabe admitir una relación de diferencias igual a la normal de pérdidas

$$\rho = \frac{\Delta p_{Fe}}{\Delta p_{Cu}} \approx \frac{p_{Fe}}{p_{Cu}} \quad [1.4-7]$$

En la previsión de esta distribución que en realidad puede comportar incluso distinto signo para ambas componentes, radica la mayor inseguridad y posible

fallo efectivo del método, el cual no suele aplicarse a los transformadores, pero sí, mucho más, a las máquinas rotatorias si bien sobre bases casi siempre injustificadas.

El proceso a seguir consistirá en

1.º Hallar las diferencias de potencias absorbidas, en condiciones nominales, por punto de rendimiento.

Designemos por

S_n la potencia aparente nominal del transformador [kVA]
 $\cos \varphi_n$ el factor de potencia nominal de servicio
 P_n la potencia útil [kW] a P.C. y $\cos \varphi$ nominales

$$P_n = S_n \cos \varphi_n \quad [\text{kW}] \quad [1.4-8]$$

η_n el rendimiento así garantizado

La potencia absorbida nominal en tales condiciones será

$$P_a = \frac{P_n}{\eta_n} \quad [\text{kW}]$$

Si el rendimiento variase en un punto, la potencia absorbida pasaría a ser

$$P'_a = \frac{P_n}{\eta_n \pm 0,01} \quad [\text{kW}]$$

y la diferencia ΔP_a entre ambas potencias absorbidas,

$$\Delta P_a = P'_a - P_a = \frac{P_n}{\eta_n \pm 0,01} - \frac{P_n}{\eta_n} = P_n \left(\frac{1}{\eta_n \pm 0,01} - \frac{1}{\eta_n} \right) \quad [\text{kW}] \quad [1.4-9]$$

Si ponemos

$$1 - \eta_n = \alpha \quad [1.4-10]$$

$$\eta_n = 1 - \alpha; \quad \eta_n \pm 0,01 = (1 - \alpha) \pm 0,01,$$

tendremos

$$\frac{1}{\eta_n} = \frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$$

$$\frac{1}{\eta_n \pm 0,01} = \frac{1}{(1 - \alpha) \pm 0,01} = \frac{1}{1 - (\alpha \mp 0,01)} = 1 + (\alpha \mp 0,01) + (\alpha \mp 0,01)^2 + \dots$$

Al ser η_n muy próximo a la unidad, α y $(\alpha \pm 0,01)$ son muy pequeños y podemos tomar una suficiente aproximación

$$\frac{1}{\eta_n} = 1 + \alpha + \alpha^2$$

$$\frac{1}{\eta_n \pm 0,01} = 1 + (\alpha \mp 0,01) + (\alpha \mp 0,01)^2$$

de donde la diferencia de potencias absorbidas [1.4-9],

$$\Delta P_a = P_n \left(\frac{1}{\eta_n \pm 0,01} - \frac{1}{\eta_n} \right) \approx P_n [1 + (\alpha \mp 0,01) + (\alpha \mp 0,01)^2 - 1 - \alpha - \alpha^2]$$

haciendo operaciones y despreciando un sumando constante + 0,00001,

$$\Delta P_a = P_n (\mp 0,01 \mp 0,02 \alpha) \quad [\text{kW}] \quad [1.4-11]$$

los signos «menos» entre los dobles del paréntesis, para un rendimiento superior, y los «más» para un rendimiento inferior al garantizado; la diferencia de consumo, pues, negativa o positiva respectivamente; transformable, por tanto, en prima o penalidad para el constructor en el mismo orden.

2.º *Calcular los factores de capitalización* individuales ψ_{Fe} y ψ_{Cu} de aplicación directa a las potencias de pérdidas [1.4-4] y [1.4-5]

$$\psi_{Fe} = y_{c_w} T_{Fe} \quad [\text{ptas/kW}]$$

$$\psi_{Cu} = y_{c_w} T_{Cu} \quad [\text{ptas/kW}]$$

3.º *Distribuir la diferencia ΔP_a* de potencias absorbidas por punto del rendimiento, entre pérdidas fijas en el hierro Δp_{Fe} y variables en el cobre, a P.C. Δp_{Cu} . Todo supuesto gratuito sobre la repartición de esta diferencia de potencias consumidas entraña un riesgo de error considerable, ya que la distribución real puede ser incluso de signos contrarios para ambos sumandos. La verdadera compensación económica será la que resulte de escribir teniendo en cuenta magnitudes y signos,

$$\Delta P_a = \Delta p_{Fe} + \Delta p_{Cu}$$

y calcular

$$\text{Prima o penalidad por punto} = \psi_{Fe} \Delta p_{Fe} + \psi_{Cu} \Delta p_{Cu} \quad [\text{ptas}] \quad [1.4-12]$$

En defecto de poder obrar con seguridad de este modo por ignorarse la repartición de la diferencia ΔP_a , que es lo que sucede al establecer la cláusula económica en un pliego de condiciones, cabe por vía de uniformidad presu-

poner como hemos dicho una cierta relación ρ entre los suplementos de pérdidas, relación del mismo orden que la que debiera existir normalmente entre las pérdidas totales de la misma naturaleza, tomando, pues [1.4-7],

$$\rho = \frac{\Delta p_{Fe}}{\Delta p_{Cu}} \approx \frac{p_{Fe}}{p_{Cu}}$$

Entonces, de aquí y con

$$\Delta P_a = \Delta p_{Fe} + \Delta p_{Cu},$$

resulta

$$\rho \Delta p_{Cu} + \Delta p_{Cu} = \Delta P_a$$

$$\boxed{\Delta p_{Cu} = \frac{\Delta P_a}{1 + \rho}} \quad [\text{kW}] \quad [1.4-13]$$

$$\boxed{\Delta p_{Fe}} = \rho \Delta p_{Cu} = \boxed{\frac{\rho}{1 + \rho} \Delta P_a} \quad [\text{kW}] \quad [1.4-14]$$

llegándose así a la etapa final.

4.º *Valoración del «punto».*

De nuevo [1.4-12],

$$\text{Prima o penalidad por punto} = \psi_{Fe} \Delta p_{Fe} + \psi_{Cu} \Delta p_{Cu} \quad [\text{ptas}]$$

En los cálculos similares para las máquinas rotatorias suele establecerse un margen de gracia sobre el rendimiento, margen que coincide con las tolerancias admitidas para dicha magnitud en las normas nacionales o internacionales especificadas; y la prima o penalidad sólo empieza a contarse sobre la desviación excedente de los márgenes señalados.

1.4.5. Ejercicio 3

Se desea establecer la cifra de prima o penalidad en pesetas por punto de rendimiento para un transformador de 2000 kVA, 30 000 \pm 5 %/440-231 V, $\cos \varphi$ normal = 0,85, cuyo rendimiento en condiciones nominales se prevé en 98,71 %.

La potencia activa nominal es, pues, $P_n = 2000 \times 0,85 = 1700$ kW.

1.º *Diferencia de potencias absorbidas* por punto de rendimiento.

De [1.4-10] el complemento a 1 del rendimiento vale

$$\alpha = 1 - 0,9871 = 0,0129$$

Según [1.4-11] la diferencia de potencias absorbidas, por punto, será

$$\begin{aligned}\Delta P_a &= \mp (0,01 + 0,02 \alpha) P_n = \mp (0,01 + 0,02 \times 0,0129) 1700 \\ &= \mp 0,010258 \times 1700 = \mp 17,44 \text{ kW}\end{aligned}$$

2.º *Factores individuales de capitalización.* Fijando el periodo de amortización para el transformador en $\tau = 20$ años con un interés del dinero $r = 10\%$, la figura 1.4.1-a nos da como valor presente específico de la anualidad de pérdidas $y = 8,50$ ptas/ptas. Si el coste de la energía en el punto de instalación lo suponemos de $c_w = 0,60$ ptas/kWh, el tiempo de conexión $T_{Fe} = 8760$ horas por año y el equivalente de carga $T_{Cu} = 2300$ horas también por año, tendremos [1.4-4] y [1.4-5],

$$\psi_{Fe} = y c_w T_{Fe} = 8,50 \times 0,60 \times 8760 = 4460 \text{ ptas/kW de pérdidas en el hierro}$$

$$\psi_{Cu} = y c_w T_{Cu} = 8,50 \times 0,60 \times 2300 = 11\,750 \text{ ptas/kW de pérdidas en el cobre}$$

3.º *Distribución de la diferencia de pérdidas ΔP_a y 4.º: valor del punto de rendimiento.*

Si adoptamos como posible una relación entre los suplementos de pérdidas del mismo orden que la que suele haber entre las pérdidas de potencia en un transformador de estas características, es decir, alrededor de

$$\rho = \frac{\Delta p_{Fe}}{\Delta p_{Cu}} \approx \frac{p_{Fe}}{p_{Cu}} \approx \frac{4000}{18\,000} = 0,222$$

resultaría para la diferencia de pérdidas en el cobre [1.4-13],

$$\Delta p_{Cu} = \frac{1}{1 + \rho} \Delta P_a = \frac{1}{1 + 0,222} 17,44 = 14,3 \text{ kW}$$

y para la de pérdidas en el hierro [1.4-14],

$$\Delta p_{Fe} = \frac{\rho}{1 + \rho} \Delta P_a = \frac{0,222}{1 + 0,222} 17,44 = 3,17 \text{ kW}$$

La prima o penalidad debería establecerse así en [1.4-12],

$$\begin{aligned}\text{Prima o penalidad por punto} &= \psi_{Fe} \Delta p_{Fe} + \psi_{Cu} \Delta p_{Cu} \\ &= 44\,600 \times 3,17 + 11\,750 \times 14,3 \\ &= 141\,000 + 168\,000 \\ &= 310\,000 \text{ ptas/punto (centésima) de rendimiento}\end{aligned}$$

1.5. Coste financiero F del transformador

Lo constituye la suma de los precios de facturación ν y del importe de la capitalización o valor presente \varkappa de la anualidad de pérdidas. Utilizaremos las expresiones sencillas que hemos deducido [1.2-2] y [1.4-3] respectivamente:

$$F = \nu + \varkappa$$

$$F = (\varphi_{Fe} G_{Fe} + \varphi_{Cu} G_{Cu}) + (\psi_{Fe} p_{Fe} + \psi_{Cu} p_{Cu}) \quad [\text{ptas}] \quad [1.5-1]$$

Recordemos que

φ_{Fe} , es el precio de facturación del núcleo de hierro, terminado y montado, en ptas/kp de chapa.

G_{Fe} , el peso de la chapa magnética en kp.

φ_{Cu} , es el precio de facturación de los bobinados, terminados y montados, en ptas/kp de cobre.

G_{Cu} , el peso del cobre en kp.

ψ_{Fe} , el factor de capitalización de las pérdidas de potencia en el hierro, en ptas/kW.

p_{Fe} , las pérdidas de potencia en el hierro a T.N. en kW.

ψ_{Cu} , el factor de capitalización de las pérdidas de potencia en el cobre, en ptas/kW.

p_{Cu} , las pérdidas de potencia en el cobre a P.C. en kW.

La comparación económica de ofertas y de servicios de los transformadores debe efectuarse siempre sobre la base del coste financiero F .

2

Optimación

2.1. Generalidades

Dentro de las construcciones eléctricas, el transformador constituye uno de los productos susceptibles de estudio matemático más preciso: su simplicidad estructural y la homogeneidad de los circuitos eléctricos y magnéticos, incluidos los de dispersión, se prestan al cálculo. Los resultados suelen alcanzar un grado de exactitud superior, por lo general, al que puede conseguirse en el estudio técnico de las máquinas rotatorias, cuya complejidad obliga a admitir hipótesis simplificadoras no siempre muy ajustadas a la realidad.

Esta posibilidad matemática ofrecida por los transformadores invita a extender los desarrollos analíticos desde el campo puramente técnico a otro no menos interesante, de importancia decisiva para la actividad industrial, es decir, al terreno económico donde forzosamente se contrastan en último término todos los valores técnicos. En efecto, nada más sencillo que construir máquinas irreprochables cuando el precio no cuenta, como es fácil también sacrificar la calidad para obtener construcciones baratas. Lo verdaderamente difícil es aunar ambas cualidades: calidad y economía.

Cuando se dispone de una herramienta matemática orientada hacia estos fines, el problema se resuelve siempre de la manera más satisfactoria en sus varios aspectos: rapidez en la decisión, seguridad en los resultados, costo de estudio tolerable, etc.

Sin el instrumento matemático, también pueden alcanzarse resultados notables por vía experimental, pero los medios que esto requiere son a veces prohibitivos y el tiempo y los gastos inherentes a la investigación frenan y retrasan el desarrollo.

No es extraño, pues, que los transformadores hayan sido objeto de amplios estudios orientados a determinar sus características constructivas desde el punto de vista más favorable al costo de fabricación o atendiendo a las

condiciones de servicio. Desde Arnold en su obra clásica hasta los últimos tratadistas sobre la materia, todos han dedicado mayor o menor atención a estas cuestiones y la literatura acerca de las mismas no escasea precisamente.

Sin embargo, quienes hayan tenido ocasión de enfrentarse en la práctica con tal género de problemas habrán podido constatar, a poco que su curiosidad o interés les haya movido a ello, que la aplicación de las reglas consideradas como ortodoxas en dicha materia no daban el fruto esperado. De hecho, muchos transformadores, al parecer bien estudiados, podrían resolverse en forma más económica y, lo que es sorprendente, conseguir a la vez mejores características de servicio, a igualdad de calidad de los materiales.

Si se analiza a fondo la cuestión, se ve que la causa de este aparente contrasentido reside en la naturaleza misma de aquellos estudios económicos, localizados en aspectos parciales o sucesivos, nunca simultáneos o de conjunto, de la parte activa del transformador.

Hemos intentado por nuestra parte, y en virtud de razones puramente comerciales ligadas a una actividad profesional, realizar el mismo estudio con amplitud tal que eliminase las contradicciones observadas entre la teoría y la práctica.

El trabajo realizado tiene su compensación en la escueta sencillez de los resultados a que conduce: la solución óptima para la construcción y servicio de los transformadores de columnas —a los cuales se ciñe el estudio, dejando por el momento a un lado los acorazados— viene expresada por un sistema de relaciones entre sus dimensiones principales, relaciones que, aunque de cálculo laborioso, pueden establecerse de una vez para siempre, recogién-dolas en gráficos permanentes, compatibles incluso con cualquier mejora técnica futura. Damos los gráficos resueltos al final de cada estudio.

Señalemos que las economías de costo realizables por este método sobre transformadores empíricos considerados previamente como normales, dependen mucho del fruto que se haya sabido extraer de aquel empirismo.

En el ejemplo que damos, huyendo de la espectacularidad, hemos escogido como base un transformador comercial perfectamente elaborado y esto reduce las diferencias a un mínimo. Lo hemos hecho de este modo deliberadamente para poner de relieve la sensibilidad del método propuesto. Con transformadores menos cuidados pueden conseguirse economías que oscilan frecuentemente entre un 10 y un 20 %, lo cual basta, por ejemplo, para convertir en rentable una fabricación que de otro modo no lo fuera. Las prescripciones vigentes sobre pérdidas quedan también en tela de juicio.

2.2. Objeto

El cálculo de un transformador, simplemente para cierta potencia y tensiones determinadas, aún cuando se fijen las condiciones de calentamiento, es susceptible de infinitas soluciones.

La sujeción a otras características técnicas adicionales (pérdidas, tensión de cortocircuito) o económicas (costo, gasto de explotación) va limitando progresivamente el grado de libertad del constructor hasta llevar el problema a un terreno más determinado que puede conducir a un número finito de soluciones, a una solución única o incluso provocar una incompatibilidad matemática.

Entre ambos extremos, la absoluta indeterminación y la solución imposible, existe, pues, toda una gama de posiciones intermedias sobre las cuales cabe asentarse para establecer un proyecto racional que satisfaga a determinadas prescripciones técnicas ineludibles, a la vez que conduzcan a un resultado económicamente satisfactorio. El objeto de este estudio es, precisamente, dar con la solución constructiva óptima haciendo uso de aquel grado de libertad de que goza el proyecto de un transformador cuando no se establecen a priori —a veces, arbitrariamente— limitaciones ya, de por sí, determinantes.

2.3. Ecuaciones fundamentales

Antes de abordar el problema desde el punto de vista económico, objeto fundamental que perseguimos, vamos a hallar nuevas formas de expresión para ciertas magnitudes técnicas decisivas, relacionándolas de un modo directo con las dimensiones geométricas del transformador, ya que a éstas se hallan ligados los pesos de los materiales activos y, de consecuencia, el costo.

Nos referiremos siempre al transformador trifásico de columnas de dos arrollamientos por ser el más común, a la vez que puede servir como base para deducir otros tipos. Supondremos también, por el momento, los devanados sin tomas de regulación y el circuito magnético de sección constante.

2.3.1. Potencia aparente

Designando por

E_1 la f.e.m., por columna de un devanado, en kV.

N_1 el número de espiras en serie, por columna, del mismo devanado.

\hat{B} la inducción máxima (amplitud), uniforme, en todo el circuito magnético, en kG.

A_{Fe} el área o sección constante, neta, del núcleo y culatas en cm².

f la frecuencia de la red alterna en Hz.

$$E_1 = 4,44 f N_1 \hat{B} A_{Fe} 10^{-8} \quad [\text{kV}]$$

Si

I_1 es la corriente, en A, del mismo bobinado,

J_1 la densidad de corriente, en A/mm²,

s_1 la sección del conductor, en mm², y

S la potencia aparente del transformador, en kVA,

$$I_1 = s_1 J_1$$

y

$$S = 3 E_1 I_1 = 3 \cdot 4,44 \cdot f N_1 \hat{B} A_{Fe} s_1 J_1 10^{-8} \text{ (kVA)}$$

Representando por A_1 , cm², la sección total del cobre, del mismo bobinado, dadas las unidades elegidas,

$$A_1 = \frac{N_1 s_1}{100} \text{ [cm}^2\text{]}$$

con lo cual, la expresión de la potencia aparente viene a ser

$$S = 13,33 \cdot 10^{-6} \cdot f \hat{B} A_{Fe} A_1 J_1 \text{ [kVA]}$$

Del mismo modo, en función de los datos similares del segundo devanado

$$S = 13,33 \cdot 10^{-6} \cdot f \hat{B} A_{Fe} A_2 J_2 \text{ [kVA]}$$

y con relación al conjunto de los dos arrollamientos

$$S = \frac{f}{150\,000} \hat{B} A_{Fe} (A_1 J_1 + A_2 J_2) \text{ [kVA]}$$

Haciendo intervenir una densidad media de corriente, J , A/mm², y la sección de cobre de ambos devanados sumados, A_{Cu} , cm², de tal modo que

$$A_{Cu} = A_1 + A_2 \text{ [cm}^2\text{]}$$

y

$$J A_{Cu} = J_1 A_1 + J_2 A_2 \text{ [A]}$$

o sea

$$J = \frac{J_1 A_1 + J_2 A_2}{A_1 + A_2} \text{ [A/mm}^2\text{]} \quad [2.3-1]$$

resulta, finalmente,

$$S = \frac{f}{150\,000} A_{Fe} A_{Cu} (\hat{B} J) \text{ [kVA]}$$

Para una frecuencia dada, la potencia del transformador es proporcional a las secciones netas del hierro y de cobre, a la inducción máxima y a la densidad media de corriente, y no depende de ningún otro factor.

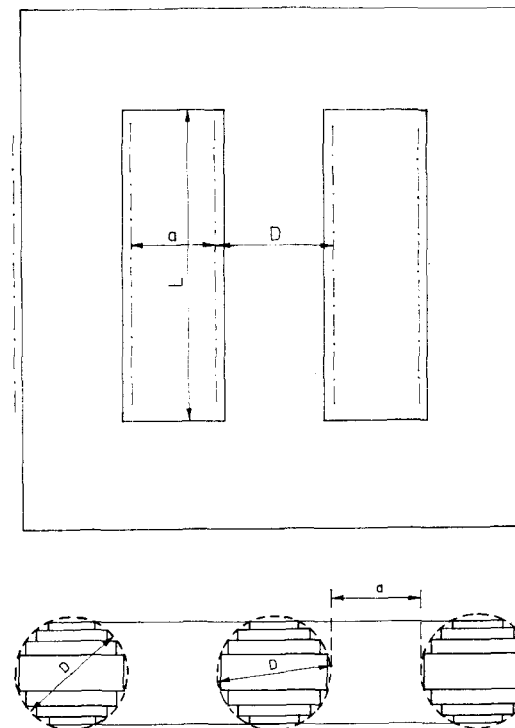


Fig. 2.1. Dimensiones principales del núcleo.

En lugar de A_{Fe} y A_{Cu} hagamos intervenir las dimensiones fundamentales del núcleo relacionándolas con aquellas secciones mediante los respectivos coeficientes de utilización. Sean, pues (figura 2.1),

D el diámetro de la circunferencia circunscrita a la sección de una columna, en cm,

L longitud o altura de la ventana, en cm,

a anchura o luz de la ventana entre circunferencias del núcleo, en cm,

$$f_{Fe} = \frac{A_{Fe}}{D^2} \quad [2.3-2]$$

el factor rectangular de utilización del núcleo, característico del tipo de escalonado elegido para su sección, figuras 2.2 y 2.3 y

$$f_{Cu} = \frac{2 A_{Cu}}{La} \quad [2.3-3]$$

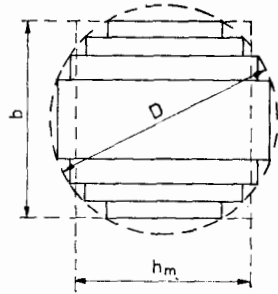
el factor de utilización de la ventana para paso del cobre.

Evidentemente

$$A_{Fe} = f_{Fe} D^2 \quad A_{cu} = f_{cu} \frac{La}{2}$$

de donde

$$S = \frac{ff_{Fe}f_{cu}}{300\,000} (D^2La) (\hat{B}J) \quad [\text{kVA}] \quad [2.3-4]$$



$$f_{Fe} = \frac{A_{Fe}}{D^2}$$

$$h_m = \frac{A_{Fe}}{b}$$

$$f_y = 4 + 2f_m$$

$$f_m = \frac{h_m}{D}$$

Fig. 2.2. Factores del núcleo.

He aquí una fórmula exacta, expresiva de la potencia de un transformador en función de las tres dimensiones principales del núcleo, D , L y a ; de los coeficientes de trabajo de la chapa, \hat{B} , y del cobre, J , y de los factores de utilización, tanto del espacio magnético o núcleo, cuyo aprovechamiento viene reflejado por f_{Fe} , como del espacio eléctrico, que podemos identificar con la superficie de ventana, y su aprovechamiento caracterizarlo por f_{cu} . Por comodidad, pongamos

$$C_s = \frac{ff_{Fe}f_{cu}}{300\,000} (\hat{B}J) \quad [\text{kVA/cm}^4] \quad [2.3-5]$$

La última ecuación se convierte de este modo en

$$S = C_s D^2 La \quad [\text{kVA}] \quad [2.3-6]$$

S , en kVA,
 D , L y a , en cm,
 C_s , en kVA/cm⁴,

cuya simplicidad y carácter nos serán muy útiles.

2.3.2. Pérdidas en el hierro

Interesa expresarlas también en función de las tres dimensiones principales del núcleo.

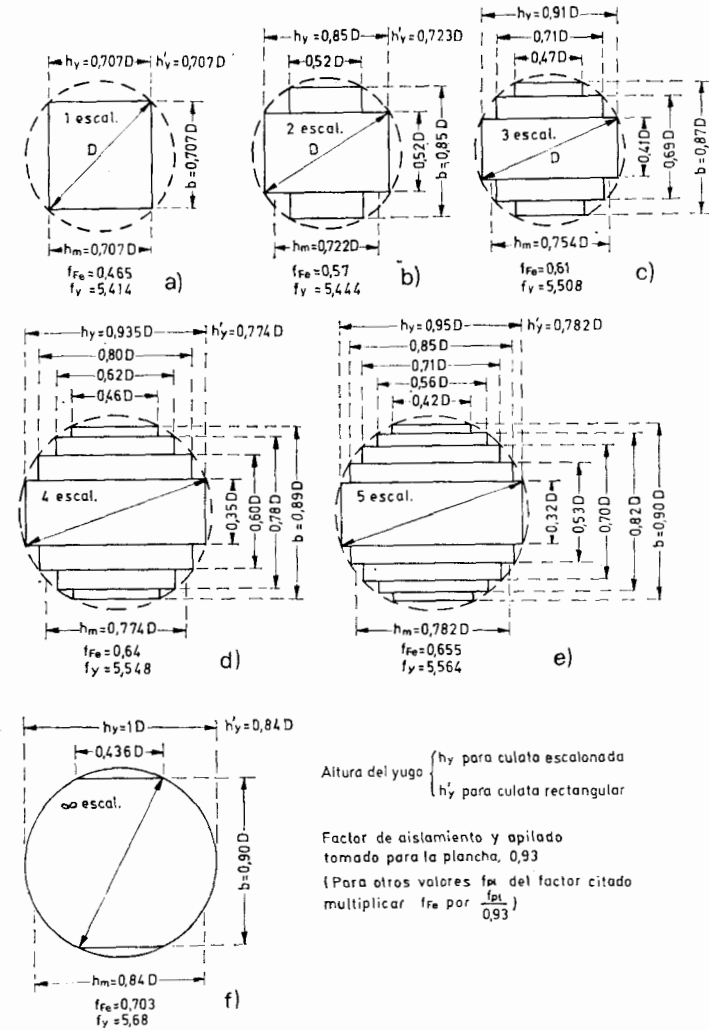
Con D , L y a en cm y el peso específico de la chapa γ_{Fe} en kp/dm³, el peso total de hierro G_{Fe} en kp, según se deduce examinando la figura 2.1, viene dado por

$$G_{Fe} = \frac{\gamma}{1000} f_{Fe} D^2 [3L + 4a + (4D + 2Df_m)] \quad [\text{kp}] \quad [2.3-7]$$

$f_m = \frac{h_m}{D}$ expresa la relación de la altura media h_m de la sección escalonada del núcleo al diámetro circunscrito.

Hagamos también

$$f_y = 4 + 2f'_m$$



Altura del yugo $\left\{ \begin{array}{l} h_y \text{ para culata escalonada} \\ h'_y \text{ para culata rectangular} \end{array} \right.$

Factor de aislamiento y apilado tomado para la plancha, 0,93
 (Para otros valores f_{pl} del factor citado multiplicar f_{Fe} por $\frac{f_{pl}}{0,93}$)

Fig. 2.3. Secciones normales del núcleo.

El producto $f_m D$ equivale, pues, a la altura media h_m , y f_m es característico, como f_{Fe} , del tipo de escalonado que se elija para la sección.

La figura 2.3 da los valores de f_{Fe} y f_m (este último como factor ante D para h_m) con las formas de secciones más corrientes. La introducción de h_m (o $f_m D$) tiene en cuenta la longitud exacta de las culatas en sus extremos a partir del eje de las columnas laterales.

La ecuación de G_{Fe} se transforma fácilmente en esta otra:

$$G_{Fe} = \frac{\gamma_{Fe} f_{Fe}}{1000} (f_y D^3 + 3 LD^2 + 4 aD^2) \quad [\text{kp}] \quad [2.3-8]$$

y como las pérdidas en el hierro p_{Fe} en W vienen dadas por $p_{Fe} = k_B G_{Fe}$, siendo k_B las pérdidas en W/kp a la inducción \hat{B} de trabajo, resulta en definitiva

$$p_{Fe} = \frac{\gamma_{Fe} f_{Fe} k_B}{1000} (f_y D^3 + 3 LD^2 + 4 aD^2) \quad [\text{W}]$$

reuniendo el factor que antecede al paréntesis en un coeficiente C_{Fe} , tal que

$$C_{Fe} = \frac{\gamma_{Fe} f_{Fe} k_B}{1000} \quad [2.3-9]$$

podemos escribir, en función de D , L y a ,

$$p_{Fe} = C_{Fe} (f_y D^3 + 3 LD^2 + 4 aD^2) \quad [\text{W}] \quad [2.3-10]$$

2.3.3. Pérdidas en el cobre

Tratemos de expresarlas también en función de las tres dimensiones principales del núcleo: D , L y a (fig. 2.4).

Si G_{Cu} es el peso total del cobre en kp, γ_{Cu} el peso específico en kp por dm^3 , $A_1 A_2$ las secciones totales de cobre neto para una y otra bobina, primaria y secundaria, en cm^2 , A_{Cu} la suma de ambas y $D_1 D_2$ los diámetros medios de las bobinas respectivas en cm,

$$G_{Cu} = \frac{3 \gamma_{Cu}}{1000} \pi (D_1 A_1 + D_2 A_2) \quad [\text{kp}] \quad [2.3-11]$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por el diámetro medio ideal del conjunto de ambos arrollamientos, es decir, por

$$D + \frac{a}{2} = \frac{2D + a}{2}$$

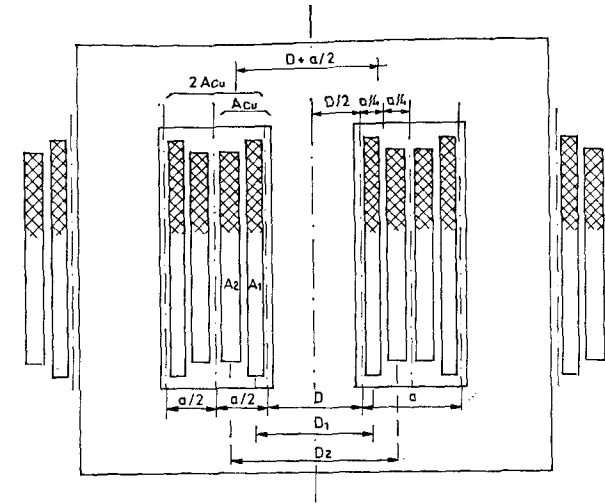


Fig. 2.4. Dimensiones de los bobinados.

y representando por ρ_D la relación del diámetro medio efectivo al ideal, o sea

$$\rho_D = \frac{\left(\frac{D_1 A_1 + D_2 A_2}{A_{Cu}} \right)}{\left(\frac{2D + a}{2} \right)} = \frac{2(D_1 A_1 + D_2 A_2)}{A_{Cu} (2D + a)}; \quad A_{Cu} = A_1 + A_2 \quad [2.3-12]$$

se obtiene la fórmula

$$G_{Cu} = \frac{3 \gamma_{Cu} \pi \rho_D}{1000} \frac{2D + a}{2} A_{Cu} \quad [\text{kp}]$$

Si sustituimos A_{Cu} por su valor con respecto a la superficie de ventana,

$$A_{Cu} = \frac{f_{Cu} L a_s}{2},$$

llegamos a esta otra expresión del peso de cobre en función de las dimensiones del hierro

$$G_{Cu} = \frac{2,356 \gamma_{Cu} f_{Cu} \rho_D}{1000} (2D + a) L a_s \quad [\text{kp}] \quad [2.3-13]$$

En cuanto a las pérdidas en el cobre p_{Cu} , en W, bastará multiplicar G_{Cu} por la cifra media de pérdidas k_J , W/kp, dependiente de las densidades de corriente en uno y otro devanado (ver nota que sigue)

$$p_{Cu} = \frac{2,356 \gamma_{Cu} f_{Cu} \rho_D k_J}{1000} (2D + a) L a_s \quad [\text{W}];$$

si ponemos, por comodidad

$$C_{Cu} = \frac{2,356 \gamma_{Cu} f_{Cu} \rho_D k_J}{1000} \quad [2.3-14]$$

resulta

$$P_{Cu} = C_{Cu} (2D + a) La \quad [W] \quad [2.3-15]$$

Nota sobre las pérdidas específicas k_J en el cobre. La manera más simple de calcular k_J en un transformador proyectado consiste en aplicar la definición misma de este parámetro

$$k_J = \frac{P_{Cu}}{G_{Cu}} \quad [W/kp] \quad [2.3-16]$$

Si se pretende usar la fórmula normal para k_J en un devanado único con densidad de corriente constante J_w que, a 75 °C, por ejemplo, viene a ser

$$k_J = 2,7 J_w^2 \quad [W/kp] \quad [2.3-16a]$$

se hace necesario tomar para la densidad media J_w un valor distinto del de J calculado por la fórmula [2.3-1], ya que, evidentemente, en J_w deben ponderarse los pesos de cobre, es decir, los productos, proporcionales a dichos pesos ($A_1 D_1$) y ($A_2 D_2$), y no solamente las secciones A_1 y A_2 de uno y otro arrollamiento

$$J_w^2 = \frac{(A_1 D_1) J_1^2 + (A_2 D_2) J_2^2}{(A_1 D_1) + (A_2 D_2)} \quad [2.3-17]$$

2.3.4. Tensión de reactancia en % de la T.N.

Su expresión viene dada por¹

$$u_x = \frac{0,4 (a v)_x}{1000} N_U A_x \frac{f}{50} \quad [\%] \quad [2.3-18]$$

donde

$(a v)_x$ = amperios-vueltas de carga por cm axial del circuito de dispersión, en la longitud equivalente L_{eq} del mismo.

N_U = espiras por voltio del bobinado.

A_x = sección eficaz del circuito magnético de dispersión en cm².

f = frecuencia en Hz.

¹ Véase, por ejemplo: J. Corrales. «Teoría, Cálculo y Construcción de Transformadores». 5.ª ed., pág. 82. Editorial Labor, Barcelona.

Pero, estando A_1 en cm², s_1 , en mm² y J_1 , en A/mm²

$$(a v)_x = \frac{N_1 I_1}{L_{eq}} = \frac{N_1 J_1 s_1}{L_{eq}} = \frac{100 A_1 J_1}{L_{eq}} = 100 \frac{A_1 J_1}{\rho_L L} \quad [Av/cm]$$

con

$$\rho_L = \frac{L_{eq}}{L} \quad [2.3-19]$$

análogamente,

$$(a v)_x = 100 \frac{A_2 J_2}{\rho_L L}$$

y también [2.3-1] y [2.3-3],

$$(a v)_x = \frac{100}{\rho_L} \frac{A_1 J_1 + A_2 J_2}{2L} = \frac{100}{\rho_L} \frac{J A_{Cu}}{2L} = \frac{100}{\rho_L} \frac{J f_{Cu} (La)}{2 \cdot 2L} \quad [2.3-20]$$

$$(a v)_x = \frac{25}{\rho_L} f_{Cu} J a \quad [Av/cm]$$

En estas ecuaciones, genéricamente, son:

$N_1 N_2$ número de espiras de uno y otro devanado.

$I_1 I_2$ corrientes nominales respectivas, en A.

$U_1 U_2$ tensiones por fase, en V.

$s_1 s_2$ sección de los conductores, en mm².

$J_1 J_2$ densidad de corriente en cada bobinado, en A/mm².

$A_1 A_2$ áreas netas de cobre en las secciones toroidales de una y otra bobina en cm².

A_{Cu} la suma de ambas, $A_1 + A_2$, en cm².

L_{eq} longitud equivalente del circuito magnético de dispersión, en cm.

J densidad de corriente [2.3-1].

En cuanto a N_U , con la potencia aparente S del transformador en kVA.

$$N_U = \frac{N_1}{U_1} = \frac{3 N_1 I_1}{S 1000} = \frac{3 A_1 J_1}{10 S} \quad [esp. V]$$

$$= \frac{3 A_2 J_2}{10 S}$$

o bien

$$N_U = \frac{3}{10 S} \frac{(A_1 J_1 + A_2 J_2)}{2} = \frac{3}{10 S} \frac{J A_{Cu}}{2} \quad [2.3-21]$$

$$= \frac{3}{10 S} \frac{J (f_{Cu} La)}{2 \cdot 2} = \frac{0,075 J f_{Cu} La}{S} \quad [esp./V]$$

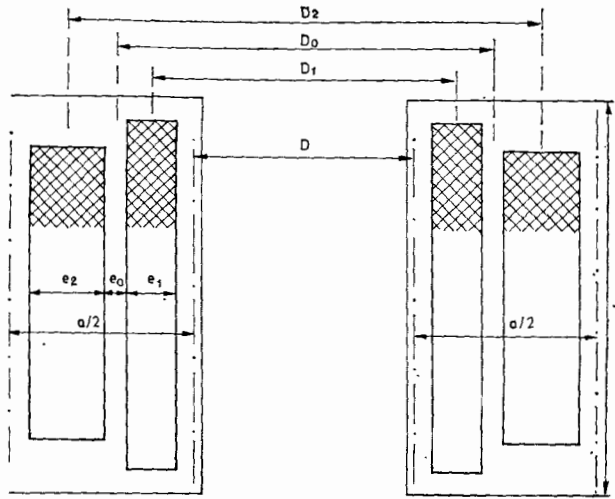


Fig. 2.5. Dimensiones del circuito de dispersión.

Del mismo modo, la sección del circuito de dispersión, con las designaciones indicadas en la figura 2.5, y las medidas en cm

$$A_x = \frac{\pi(D_1 e_1 + D_2 e_2)}{3} + \pi D_0 e_0 \quad [\text{cm}^2] \quad [2.3-22]$$

Representando por \$\rho_x\$ la relación de la sección efectiva del circuito de dispersión \$A_x\$ a la de la corona circular comprendida entre el núcleo y el eje longitudinal de la ventana \$\pi \left(D + \frac{a}{2} \right) \frac{a}{2}\$, es decir,

$$\rho_x = \frac{4}{3} \frac{D_1 e_1 + D_2 e_2 + 3 D_0 e_0}{(2 D + a) a} \quad [2.3-22a]$$

resulta

$$A_x = \frac{\pi}{4} \rho_x (2 D + a) a \quad [\text{cm}^2] \quad [2.3-23]$$

Sustituyendo [2.3-20], [2.3-21] y [2.3-23] en [2.3-18],

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= \frac{0,4}{1000} \left(\frac{25}{\rho_L} f_{Cu} J a \right) \left(\frac{0,075 J f_{Cu} L a}{S} \right) \left(\frac{\pi}{4} \rho_x [2 D + a] a \right) \frac{f}{50} \\ &= \frac{0,588}{1000} \frac{\rho_x}{\rho_L} \frac{f}{50} (f_{Cu} J)^2 \frac{L a^3}{S} (2 D + a) \quad [\%] \end{aligned}$$

Si hacemos

$$C'_x = \frac{0,588}{1000} \frac{\rho_x}{\rho_L} \frac{f}{50} (f_{Cu} J)^2,$$

es

$$\dot{u}_x = \frac{C'_x}{S} L a^3 (2 D + a) \quad [\%]$$

He aquí, pues, también la expresión de la tensión de reactancia [%] en función de las tres dimensiones fundamentales del núcleo y de la potencia \$S\$ del transformador. Para eliminar esta última y teniendo en cuenta que \$S = C_s (D^2 L a)\$, siendo,

$$C_s = \frac{f f_{Fe} f_{Cu}}{300\,000} (B J),$$

resulta

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= \frac{C'_x}{C_s} \frac{L a^3 (2 D + a)}{D^2 L a} = \frac{C'_x}{C_s} \left(\frac{a}{D} \right)^2 (2 D + a) = \\ &= \frac{0,588}{1000} \frac{\rho_x}{\rho_L} \frac{f}{50} \frac{(f_{Cu} J)^2 \cdot 300 \cdot 10^3}{f f_{Fe} f_{Cu} (B J)} \frac{a^2}{D^2} (2 D + a) = \\ &= \left[C_x \left(\frac{a}{D} \right)^2 (2 D + a) \right] \quad [\%] \quad [2.3-25] \end{aligned}$$

con

$$C_x = 3,528 \frac{\rho_x f_{Cu} J}{\rho_L f_{Fe} B} \quad [2.3-26]$$

Nótese, de paso, que por la fórmula [2.3-25] se deduce que, para un transformador dado, \$\dot{u}_x\$, en %, es independiente de la frecuencia.

2.4. Bases del cálculo

Recogemos a continuación las cuatro ecuaciones fundamentales del transformador, deducidas anteriormente:

$$S = C_s (D^2 L a) \quad [\text{kVA}] \quad [2.4-1]$$

$$P_{Fe} = C_{Fe} (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 L D^2) \quad [\text{W}] \quad [2.4-2]$$

$$P_{Cu} = C_{Cu} (L a) (2 D + a) \quad [\text{W}] \quad [2.4-3]$$

$$\dot{u}_x = C_x \left(\frac{a}{D} \right)^2 (2 D + a) \quad [\%] \quad [2.4-4]$$

Todas ellas expresan características básicas de servicio S , p_{Fe} , p_{Cu} , u_x en función de las dimensiones principales del núcleo D , L y a , cm.

Los parámetros C_s a C_x incluyen los coeficientes de trabajo \hat{B} (kG), J y J_w (A/mm²) y definen a la vez el tipo constructivo por medio de los varios factores de utilización del material activo y de los espacios aislantes, a saber, [2.3-5], [2.3-9], [2.3-14] y [2.3-26]:

$$C_s = \frac{f f_{Fe} f_{Cu}}{300 \cdot 10^3} (\hat{B} J) \quad [\text{kVA/cm}^4] \quad [2.4-5]$$

$$C_{Fe} = \frac{\gamma_{Fe} f_{Fe} k_B}{1000} \quad [\text{W/cm}^3] \quad [2.4-6]$$

$$C_{Cu} = \frac{2,356 \gamma_{Cu} f_{Cu} \rho_D k_J}{1000} \quad [\text{W/cm}^3] \quad [2.4-7]$$

$$C_x = 3,528 \frac{\rho_x}{\rho_L} \frac{f_{Cu}}{f_{Fe}} \frac{J}{\hat{B}} \quad \left[\frac{\%}{\text{cm}} \right] \quad [2.4-8]$$

Intervienen en ellos los dos factores de utilización [2.3-2] y [2.3-3]

$$\left. \begin{aligned} f_{Fe} &= \frac{A_{Fe}}{D^2} \text{ para el hierro} \\ f_{Cu} &= \frac{2 A_{Cu}}{La} \text{ para el cobre} \end{aligned} \right\} [2.4-9]$$

tres relaciones: ρ_D [2.3-12], entre los diámetros efectivos e ideal de las bobinas; ρ_L [2.3-19], entre la longitud equivalente del circuito magnético de dispersión y la de la columna; y ρ_x , [2.3-22], entre la sección eficaz transversal de dicho circuito y la de la corona circular correspondiente a media ventana

$$\rho_D = \frac{2 (D_1 A_1 + D_2 A_2)}{(A_1 + A_2) (2 D + a)} \quad [2.4-10]$$

$$\rho_L = \frac{L_{eq}}{L} \quad [2.4-11]$$

$$\rho_x = \frac{4}{3} \frac{D_1 e_1 + D_2 e_2 + 3 D_0 e_0}{(2 D + a) a} \quad [2.4-12]$$

y las dos cifras de pérdidas k_B , W/kp, en el hierro y k_J , W/kp, en el cobre ligadas la primera a la inducción \hat{B} (kG), por la característica de la chapa magnética, y la segunda a la densidad de corriente J_w (A/mm²) por la fórmula $k_J = 2,7 J_w^2$, siendo J_w la densidad de pérdidas [2.3-17],

$$J_w^2 = \frac{A_1 D_1 J_1^2 + A_2 D_2 J_2^2}{A_1 D_1 + A_2 D_2} \quad [2.4-13]$$

y

$$J = \frac{A_1 J_1 + A_2 J_2}{A_{Cu}} \quad [2.4-13a]$$

Hagamos notar que todas las ecuaciones deducidas son absolutamente racionales sin que en ninguna de ellas intervengan hipótesis simplificadoras de cualquier género. Las dificultades para emplearlas como método directo en el cálculo de transformadores serían, no obstante, insuperables, ya que, como pronto veremos, la solución matemática se complica en grado sumo. Y, por otro lado, el partir de las mismas para establecer a priori las dimensiones del transformador, tropieza también con el inconveniente de que requieren el conocimiento previo de algunos factores como f_{Cu} , ρ_D , ρ_L y ρ_x , difíciles de precisar si no se dispone de datos sobre construcciones anteriores similares.

Ello no obsta para que con el auxilio de estas ecuaciones convenientemente modificadas, podamos llegar a resultados prácticos de verdadero interés entre los cuales figura el que ahora más nos importa, es decir, la solución del transformador más económico.

En puro análisis matemático, el sistema de las cuatro ecuaciones fundamentales [2.4-1] a [2.4-4] en S , p_{Fe} , p_{Cu} y u_x , una vez fijados los coeficientes de trabajo y los factores constructivos, contiene sólo tres incógnitas: D , L y a . El tipo de construcción elegido (tenida en cuenta la tensión) y los coeficientes de trabajo mencionados, determinan por completo a los parámetros C_s , C_{Fe} , C_{Cu} y C_x . Se deduce, pues, que si se fijan las cuatro características indicadas: potencia, pérdidas en el hierro, pérdidas en el cobre y tensión de reactancia (o la de cortocircuito) la solución lógica será en general imposible. He aquí, pues, una primera advertencia para los que elaboran pliegos de condiciones excesivamente detallados en sus demandas de transformadores: la fijación a priori de las pérdidas en el hierro y en el cobre y de la tensión de cortocircuito obliga al constructor a adoptar, para satisfacerlas, unos coeficientes de trabajo anormales; en términos matemáticos, a convertir en variable adicional alguno de los cuatro parámetros, normalmente establecidos, sancionados por la práctica. Si además se sientan condiciones sobre la corriente magnetizante (en la cual no hacemos hincapié en este estudio por ser muy secundaria con los tipos modernos de chapas para transformadores), las dificultades se acrecientan. Júzguese de lo peligroso que es «completar» los pliegos de condiciones atando las manos del constructor en aquellos puntos que deben ser privativos de su propia experiencia. ¡No digamos nada de otros pliegos que fijan, además, las densidades de corriente o las distancias de aislamiento!

En el extremo opuesto figura el establecer como únicos datos, la potencia y las tensiones nominales. Equivale a plantear una sola ecuación [2.4-1], con sus tres incógnitas D , L y a . El número de soluciones es entonces infinito y corre a cargo del constructor conseguir determinadas características adicionales. Su capacidad queda ahora a prueba, aunque no tanto como pudiera parecer, existiendo, como existen, de hecho, prescripciones oficiales y normas nacionales a las cuales, por razones de equidad o por obligación, debe también sujetarse. Tal acontece, a menudo, en la fabricación de trans-

formadores normales o de serie. De todas maneras, la iniciativa del constructor halla en general amplio campo donde desarrollarse.

La fijación estricta de las pérdidas en el hierro y de las pérdidas en el cobre, junto con la potencia del transformador proporciona en teoría un sistema de tres ecuaciones [2.4-1] a [2.4-3] con sus tres incógnitas D , L y a del cual se deriva una solución única. Sin que llegue a plantearse la incompatibilidad que surge de añadir una cuarta condición (tensión de cortocircuito o corriente magnetizante) tampoco deja al constructor otro margen de iniciativa que no sea el de intervenir en los elementos pasivos de la fabricación para abaratar los costos. Pero el prefijar las pérdidas individuales en el hierro y en el cobre, ni siquiera las totales, puede constituir, como veremos, una garantía de acierto. De este fallo ádolescen la mayoría de las normas nacionales y aquellas prescripciones debieran abandonarse.

El adoptar la postura intermedia de señalar las pérdidas totales p dejando libre su distribución entre el cobre y el hierro se traducirá en el plano matemático por sustituir a las dos ecuaciones [2.4-2] y [2.4-3] una sola, combinada de ambas, reduciéndose, pues, el sistema de las tres primeras a

$$S = C_s (D^2 La) \quad [\text{kVA}] \quad [2.4-14]$$

$$p = C_{Fe} (f_v D^3 + 4 a D^2 + 3 LD^2) + C_{Cu} (La) (2 D + a) \quad [\text{W}] \quad [2.4-15]$$

con las mismas tres incógnitas D , L , a , lo que proporciona un grado de libertad que puede utilizarse, o bien para determinar la solución única junto con la ecuación de la caída por reactancia,

$$u_x = C_x \left(\frac{a}{D} \right)^2 (2 D + a) \quad [2.4-16]$$

o bien —punto más interesante—, para añadir al proyecto una condición económica, la cual, por sus características singulares, la estudiaremos en otro lugar.

Veremos, de paso, que, aparte la imposición ociosa de aquellas pérdidas, las condiciones económicas pueden satisfacer por igual al aspecto constructivo del transformador (precio de costo) y al comportamiento en servicio (gastos de explotación y coste financiero).

De todos modos, anticipándonos a las conclusiones finales que se desprenden de nuestro estudio, hagamos constar que la fijación de las pérdidas más económicas y su reparto, teniendo en cuenta la capitalización de las mismas por el usuario, sólo debe correr a cargo del constructor, soslayando cualquier otro imperativo externo, incluso las normas en uso.

Para ello ofrecemos al final las soluciones adecuadas en forma de ecuaciones o gráfico de rápido manejo.

2.5. Valoraciones

2.5.1. Precios de facturación, capitalización de pérdidas y precio financiero

En el estudio matemático sólo tendremos en cuenta la parte activa del transformador, cobre aislado y chapa magnética, y desde el punto de vista de la fabricación, tanto los devanados como el núcleo se valorarán por el importe a que resulten una vez terminados y montados, fuera de la caja. Los aislantes de separación, los aisladores, el aceite, los accesorios estructurales y, en general, cualquier elemento cuyo cargo pueda considerarse, dentro de un mismo transformador, independiente de la proporción relativa que existe entre cobre y hierro no entrarán en la constitución de los precios que haremos intervenir, sino que se interpretarán como meras constantes aditivas para llegar en su caso al precio global. En lo que respecta a la cuba y al sistema de refrigeración, una fracción de su costo se halla afectada por las pérdidas totales y de consecuencia por los materiales activos, hierro y cobre; esto se puede tener en cuenta incrementando el precio unitario de los mismos en una cierta magnitud proporcional según ambas clases de pérdidas, aunque el prescindir de tal corrección no suele tener una influencia decisiva sobre los resultados.

De un modo u otro han de establecerse por el constructor, y ello no es difícil, los dos coeficientes de precios en factura, φ_{Fe} , ptas/kp de hierro (chapa magnética) y φ_{Cu} , ptas/kp de cobre (arrollamientos terminados). Es sorprendente en la práctica el escaso margen de variación de una y otra cifra para transformadores diversos, dentro de una amplia gama de tipos y potencias, y menor aún el de la relación ρ_φ entre ambos

$$\rho_\varphi = \frac{\varphi_{Cu}}{\varphi_{Fe}} \quad [2.5-1]$$

que acostumbra valer alrededor de 4 a 4,5.

Así, el precio de venta del transformador reducido a sus componentes activos viene dado por [1.2-b],

$$v = \varphi_{Fe} G_{Fe} + \varphi_{Cu} G_{Cu} \quad [\text{ptas}] \quad [2.5-2]$$

El usuario debe de añadir a este precio, que para él es el de compra, el montante de la capitalización que comportan las pérdidas de energía en servicio. Los factores de capitalización, en ptas/W, distintos para las pérdidas fijas en el hierro y las pérdidas variables en el cobre, los representamos por ψ_{Fe} y ψ_{Cu} respectivamente [1.4.2-a], y se hallan establecidos por casi todas las compañías de servicio eléctrico.

En nuestro país acostumbran regir los de UNESA que en la actualidad son, como dijimos en el capítulo 1,

$$\begin{aligned} \psi_{Fe} &= 45 \text{ ptas/W de pérdidas en el hierro} \\ \psi_{Cu} &= 12 \text{ ptas/W de pérdidas en el cobre} \end{aligned}$$

con una relación entre ambos,

$$\rho_{\psi} = \frac{\psi_{Fe}}{\psi_{Cu}} = \frac{45}{12} = 3,75$$

De tal modo, la capitalización o coste inicial suplementario del transformador como consecuencia de las pérdidas asciende a

$$\kappa = \psi_{Fe} p_{Fe} + \psi_{Cu} p_{Cu} \quad [\text{ptas}] \quad [2.5-3]$$

El precio financiero total F en el cual deben basarse las decisiones económicas por parte del usuario, resulta ser así [1.5-a],

$$F = v + \kappa = (\varphi_{Fe} G_{Fe} + \varphi_{Cu} G_{Cu}) + (\psi_{Fe} p_{Fe} + \psi_{Cu} p_{Cu}) \quad [\text{ptas}] \quad [2.5-4]$$

y como, dados los coeficientes de pérdidas k_B para el hierro y k_J para el cobre [W/kp], son

$$p_{Fe} = k_B G_{Fe} \quad [\text{W}]; \quad p_{Cu} = k_J G_{Cu} \quad [\text{W}] \quad [2.5-5]$$

tendremos

$$F = (\varphi_{Fe} + k_B \psi_{Fe}) G_{Fe} + (\varphi_{Cu} + k_J \psi_{Cu}) G_{Cu} \quad [\text{ptas}] \quad [2.5-5a]$$

los sumandos entre paréntesis no son otra cosa sino los costos financieros que se desprenden, por kp de Fe y Cu respectivamente

$$\Psi_{Fe} = \varphi_{Fe} + k_B \psi_{Fe} \quad \Psi_{Cu} = \varphi_{Cu} + k_J \psi_{Cu} \quad [\text{ptas/kp}] \quad [2.5-6]$$

y la relación entre ambos

$$\rho_F = \frac{\Psi_{Cu}}{\Psi_{Fe}} \quad [2.5-7]$$

es un valor característico del mercado de transformadores, que oscila entre estrechos límites incluso para países de economía muy diversa. Su valor suele hallarse entre 3 y 3,5.

Por ejemplo: si ponemos

para los precios de factura

$$\begin{aligned} \varphi_{Fe} &= 75 \text{ ptas/kp de chapa montada,} \\ \varphi_{Cu} &= 300 \text{ ptas/kp de cobre bobinado,} \end{aligned}$$

para los coeficientes de capitalización

$$\begin{aligned} \psi_{Fe} &= 45 \text{ ptas/W de pérdidas en el hierro,} \\ \psi_{Cu} &= 12 \text{ ptas/W de pérdidas en el cobre,} \end{aligned}$$

y para los coeficientes de pérdidas,

$$\begin{aligned} k_B &= 2,4 \text{ W/kp, pérdidas en el hierro a T.N.,} \\ k_J &= 24 \text{ W/kp, pérdidas en el cobre con la corriente nominal,} \end{aligned}$$

tendremos para los precios financieros,

$$\begin{aligned} \Psi_{Fe} &= \varphi_{Fe} + k_B \psi_{Fe} = 75 + 2,4 \cdot 45 = 183 \text{ ptas/kp de chapa,} \\ \Psi_{Cu} &= \varphi_{Cu} + k_J \psi_{Cu} = 300 + 24 \cdot 12 = 588 \text{ ptas/kp de cobre} \end{aligned}$$

y para las relaciones de precios,

$$\rho_{\varphi} = \frac{\varphi_{Cu}}{\varphi_{Fe}} = \frac{300}{75} = 4 \quad \text{en cuanto a la fabricación}$$

$$\rho_{\psi} = \frac{\psi_{Cu}}{\psi_{Fe}} = \frac{45}{12} = 3,75 \quad \text{en cuanto al costo de las pérdidas}$$

y

$$\rho_F = \frac{\Psi_{Cu}}{\Psi_{Fe}} = \frac{588}{183} = 3,21.$$

2.5.2. Influencia de las dimensiones en los precios del transformador

Para poder analizar esta influencia hemos de poner los costos en función de las dimensiones principales lo cual no es difícil, ya que disponemos de las ecuaciones de pérdidas [2.4-2] y [2.4-3] ligadas también directamente a los pesos. Si hacemos [2.4-6] y [2.4-7],

$$C'_{Fe} = \frac{\gamma_{Fe} f_{Fe}}{1000} = \frac{C_{Fe}}{k_B} \quad [2.5-8]$$

$$C'_{Cu} = \frac{2,356 \gamma_{Cu} f_{Cu} \rho_D}{1000} = \frac{C_{Cu}}{k_J} \quad [2.5-9]$$

se llega inmediatamente [2.4-2] y [2.4-3], a estas otras ecuaciones de la naturaleza propuesta.

Pesos

$$G_{Fe} = C'_{Fe} (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 L D^2) \quad [\text{kp}] \quad \text{para el hierro} \quad [2.5-10]$$

y

$$G_{Cu} = C'_{Cu} (L a) (2 D + a) \quad [\text{kp}] \quad \text{para el cobre} \quad [2.5-11]$$

Precio de venta

$$v = k_{Fe} \cdot (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 L D^2) + k_{Cu} (L a) (2 D + a) \quad [\text{ptas}] \quad [2.5-12]$$

con

$$k_{Fe} = C'_{Fe} \varphi_{Fe} \quad [2.5-13]$$

$$k_{Cu} = C'_{Cu} \varphi_{Cu} \quad [2.5-14]$$

Costo de capitalización

$$\kappa = q_{Fe} (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 LD^2) + q_{Cu} (La) (2 D + a) \quad [\text{ptas}] \quad [2.5-15]$$

con

$$q_{Fe} = (C'_{Fe} k_B) \psi_{Fe} = C_{Fe} \psi_{Fe} \quad [2.5-15a]$$

y

$$q_{Cu} = (C'_{Cu} k_J) \psi_{Cu} = C_{Cu} \psi_{Cu} \quad [2.5-15b]$$

Costo financiero

$$F = K_{Fe} (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 LD^2) + K_{Cu} (La) (2 D + a) \quad [\text{ptas}] \quad [2.5-16]$$

con

$$K_{Fe} = C'_{Fe} (\varphi_{Fe} + k_B \psi_{Fe}) = C'_{Fe} \Psi_{Fe} \quad [2.5-17]$$

y

$$K_{Cu} = C'_{Cu} (\varphi_{Cu} + k_J \psi_{Cu}) = C'_{Cu} \Psi_{Cu} \quad [2.5-18]$$

Las dimensiones D , L y a deben satisfacer, como condición previa a la ecuación [2.4-1]

$$\frac{S}{C_s} = Q \quad [\text{cm}^4] \quad [2.5-19]$$

con [2.4-5],

$$C_s = \frac{f f_{Fe} f_{Cu}}{300 \cdot 10^3} (BJ) \left[\frac{\text{kVA}}{\text{cm}^4} \right] \quad [2.5-20]$$

$$Q = D^2 La \quad [\text{cm}^4] \quad [2.5-21]$$

Al producto obligado $Q = D^2 La$ determinado por la potencia aparente S del transformador, la frecuencia f , los coeficientes de trabajo B de la chapa y J media del cobre y los factores respectivos de utilización f_{Fe} y f_{Cu} [2.4-9] lo denominamos la *cuártica* del transformador.

Los sistemas de ecuaciones que se desprenden de las indicadas [2.5-12] a [2.5-19] nos permitirán en todos los casos hallar la solución constructiva más económica según el punto de vista en que nos situemos.

2.6. Transformador de mínimo precio de venta

Pudiera caerse en la tentación de resolver siempre el transformador con este criterio, pero vamos a ver pronto que, en condiciones de servicio normal, su adquisición no sería buen negocio para el usuario.

No obstante, en circunstancias especiales, cuando el tiempo de conexión sea muy reducido (transformadores de arranque, de servicio intermitente o temporal), cabe perfectamente acogerse a esta norma.

Tomemos la ecuación de la potencia específica representada por la cuártica Q [2.5-21] y la del precio de venta [2.5-12]

$$Q = D^2 La \quad [\text{cm}^4] \quad [2.6-1]$$

$$v = k_{Fe} (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 LD^2) + k_{Cu} (La) (2 D + a) \quad [\text{ptas}] \quad [2.6-2]$$

La primera es de cumplimiento obligado si el transformador ha de poder dar la potencia asignada con los coeficientes de trabajo previstos, que nos fijan el valor de Q [2.5-19] y [2.5-20]. El precio de venta v dependerá de cómo hayamos elegido los valores D , L y a dentro de la primera ecuación, la cual admite por sus tres variables infinito número de soluciones. Si el sistema ha de quedar perfectamente determinado precisamos de dos ecuaciones más, y para ello podemos introducir la condición económica de mínimo precio de venta v sustituyendo en [2.6-2] una cualquiera de las variables, despejada de [2.6-1], derivando luego alternativamente respecto a las dos restantes e igualando a cero las derivadas.

Si eliminamos a entre [2.6-1] y [2.6-2] y derivamos v una vez respecto a L y otra respecto a D llegamos al siguiente sistema triple, bastante complicado, que sin embargo nos determina por completo las tres incógnitas D , L y a (véase Apéndice 1) como valores óptimos

$$Q = D^2 (La) \quad [2.6-3]$$

$$L^2 = \frac{4}{3} \frac{Q}{D^2} + \frac{1}{3} \frac{\rho_k Q^2}{D^2} \quad [2.6-4]$$

$$L^2 D^6 + \frac{f_y}{2} LD^7 - \frac{\rho_k}{3} (QLD^3 + 2 Q^2) = 0 \quad [2.6-5]$$

ρ_k representa simplemente la relación de coeficientes de trabajo y de precios k_{Cu} y k_{Fe} para el cobre y para el hierro

$$\rho_k = \frac{k_{Cu}}{k_{Fe}} = \frac{C'_{Cu} \varphi_{Cu}}{C'_{Fe} \varphi_{Fe}} \quad [2.6-6]$$

y su cifra suele hallarse comprendida entre 5 y 6 como límites; f_y es el factor geométrico del yugo que ya conocemos y puede tomarse de la figura 2.3, de acuerdo con el número de escalones.

La solución del sistema de ecuaciones [2.6-3], [2.6-4], [2.6-5] con términos de 7.º grado en D es ardua, pero introduciendo una variable auxiliar

$$A = D^4$$

se simplifica notablemente el sistema, resolviéndose para A en esta otra ecuación de 3.º grado (véase Apéndice 2)

$$A^3 + AA^2 + BA - C = 0 \quad [2.6-7]$$

con

$$A = \left(\frac{\rho_k}{f_y}\right) \left(\frac{f_y}{4} - \frac{16}{3\rho_k f_y} - \frac{4}{3}\right) Q \quad [2.6-8]$$

$$B = \left(\frac{\rho_k}{f_y}\right)^2 \left(\frac{8}{3\rho_k} - \frac{f_y}{3} + \frac{4}{9}\right) Q^2 \quad [2.6-9]$$

$$C = \left(\frac{\rho_k}{f_y}\right)^3 f_y \left(\frac{1}{3\rho_k} - \frac{1}{9}\right) Q^3 \quad [2.6-10]$$

El hallar las raíces de la ecuación [2.6-7], al hacerla numérica, y por ende, el diámetro óptimo, D_{opt} , desde el punto de vista del precio de venta mínimo v_{min} ,

$$D_{opt} = \sqrt[4]{A} \quad [2.6-11]$$

es un problema matemático bien conocido; el método gráfico, del cual daremos ejemplo a continuación, proporciona la solución con un esfuerzo relativamente moderado; pero aún es posible, sin gran error, reducir el proceso de solución, en la práctica, a una simple lectura mediante curvas ya preparadas $D = f(Q)$ con ρ_k como parámetro e incluso hasta cierto punto $D = f(S)$ para los casos más frecuentes.

En efecto: los coeficientes numéricos A , B y C [2.6-8] a [2.6-10] sólo dependen del factor geométrico del yugo f_y , de la relación ρ_k y del valor de la cuártica $Q = \frac{S}{C_s}$ exigida por el transformador. Esta última es proporcional a la potencia aparente S mientras que f_y y ρ_k , especialmente el primero, varían entre márgenes muy limitados, pudiendo tomarse para f_y un cierto valor medio y elegir f_k como parámetro. Así pues, la única variable que realmente afectará a D_{opt} para cada cociente ρ_k es la cuártica Q o la potencia proporcional S del transformador cuya influencia, por otra parte, cabía ya esperar.

Esto nos ha permitido trazar las gráficas de la figura 2.6 en escala logarítmica $D_{opt} = f(Q)$, y las de la figura 2.9, $D_{opt} = f(S)$, la primera, racional; la segunda, orientativa, tomando como único parámetro, dentro de un amplio

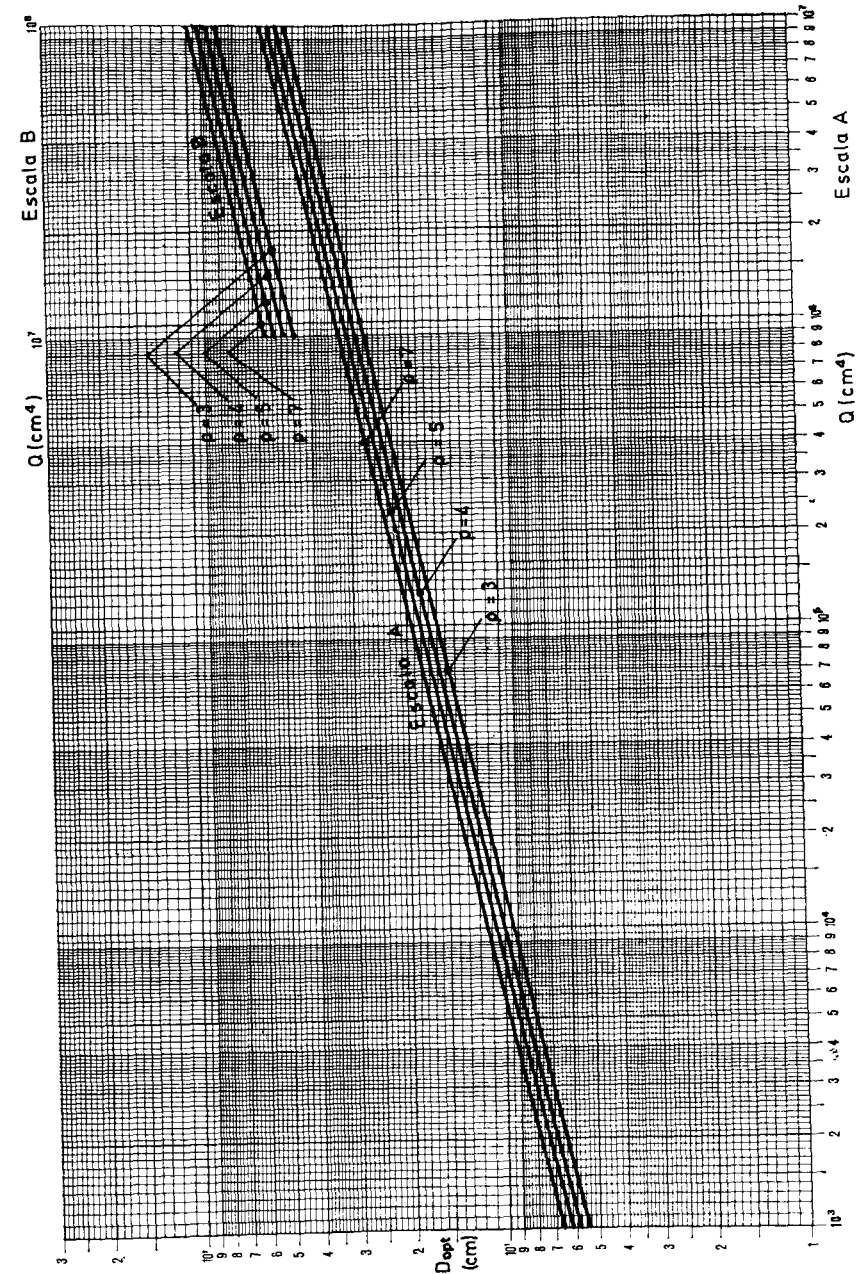


Fig. 2.6. Diámetro óptimo D_{opt} del núcleo según la cuártica Q del transformador. $Q = Q_k$ o Q_K según el criterio de optimación.

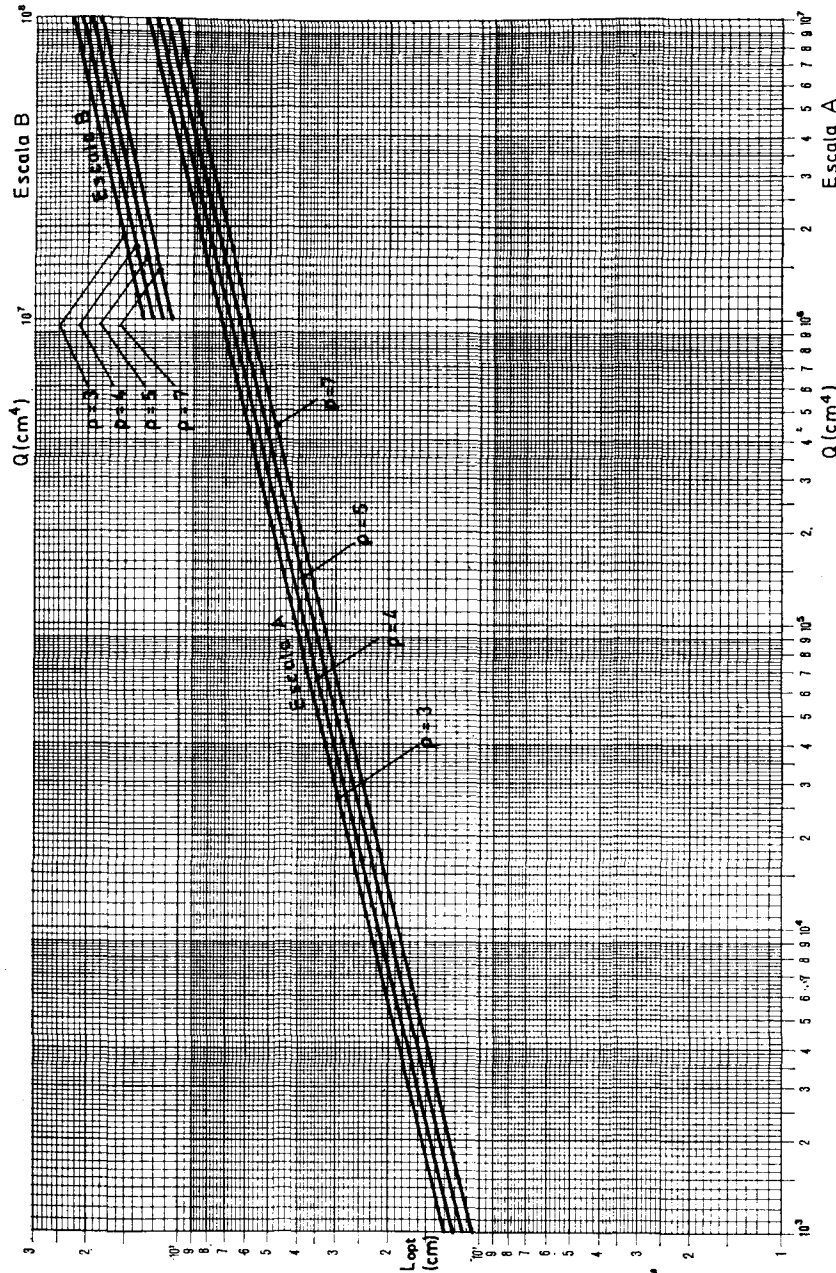


Fig. 2.7. Altura óptima de ventana L_{opt} según la cuántica Q del transformador $\rho = \rho_k$ o ρ_k según el criterio de optimización.

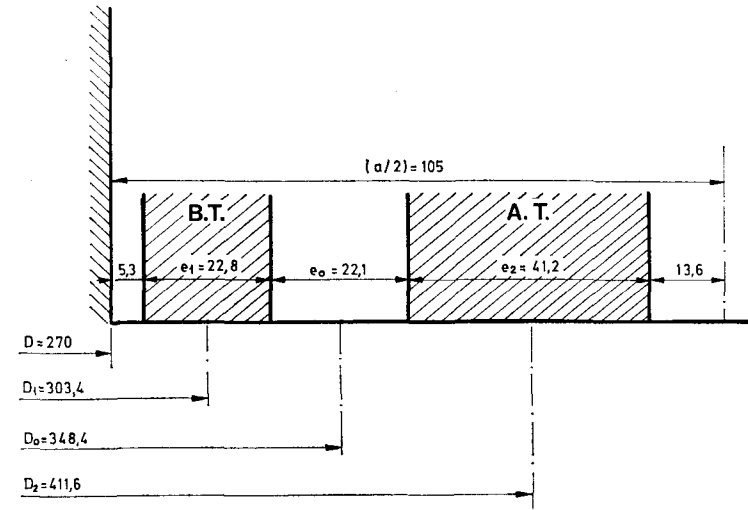


Fig. 2.7.1. Distribución radial esquemática de la ventana de un transformador trifásico convencional de 2000 kVA/30 ± 5 kV/400-231 V, 50 Hz. (Dimensiones en mm).

margen de valores para mayor ámbito de aplicación, la relación mixta de costes y coeficientes de trabajo,

$$\rho_k = \frac{k_{Cu}}{k_{Fe}} = \frac{C'_{Cu} \varphi_{Cu}}{C'_{Fe} \varphi_{Fe}}$$

dados C'_{Cu} y C'_{Fe} por las fórmulas [2.5-8] y [2.5-9].

Tanto Q como L y a óptimas son proporcionales a la $\sqrt[4]{Q}$ (véanse Apéndices 3 y 4), lo que hace muy rápido el trazado de aquellos gráficos.

De tal modo, basta calcular Q y ρ_k para el transformador propuesto, y leer directamente en la gráfica correspondiente el diámetro óptimo D_{opt} desde el punto de vista meramente constructivo. El Apéndice 4 expone el cálculo que ha llevado al trazado de la gráfica de diámetros óptimos.

La longitud de ventana óptima L_{opt} , que viene dada en función de Q y D y de la misma ρ_k por la fórmula [2.6-4] se halla también ya resuelta en las gráficas de las figuras 2.7 (exacta) y 2.9 (de guía), y el Apéndice 5 muestra el cálculo seguido.

La anchura óptima de ventana $a_{opt} = \frac{Q}{D_{opt}^2 L_{opt}}$ de acuerdo con las anteriores se halla en las figuras 2.8 y 2.9 (véase Apéndice 6).

Sobre los coeficientes de utilización del hierro f_{Fe} , y del cobre en el espacio de la ventana f_{Cu} , con los cuales varía en razón inversa, la figura 2.3 proporciona directamente el valor del primero según la forma de la sección del núcleo; y el segundo, que suele oscilar entre 0,15 y 0,5, depende en gran medida del tamaño y tensión del transformador, siendo tanto más elevado cuanto mayor la potencia y menor el voltaje. Servirán de orientación otras

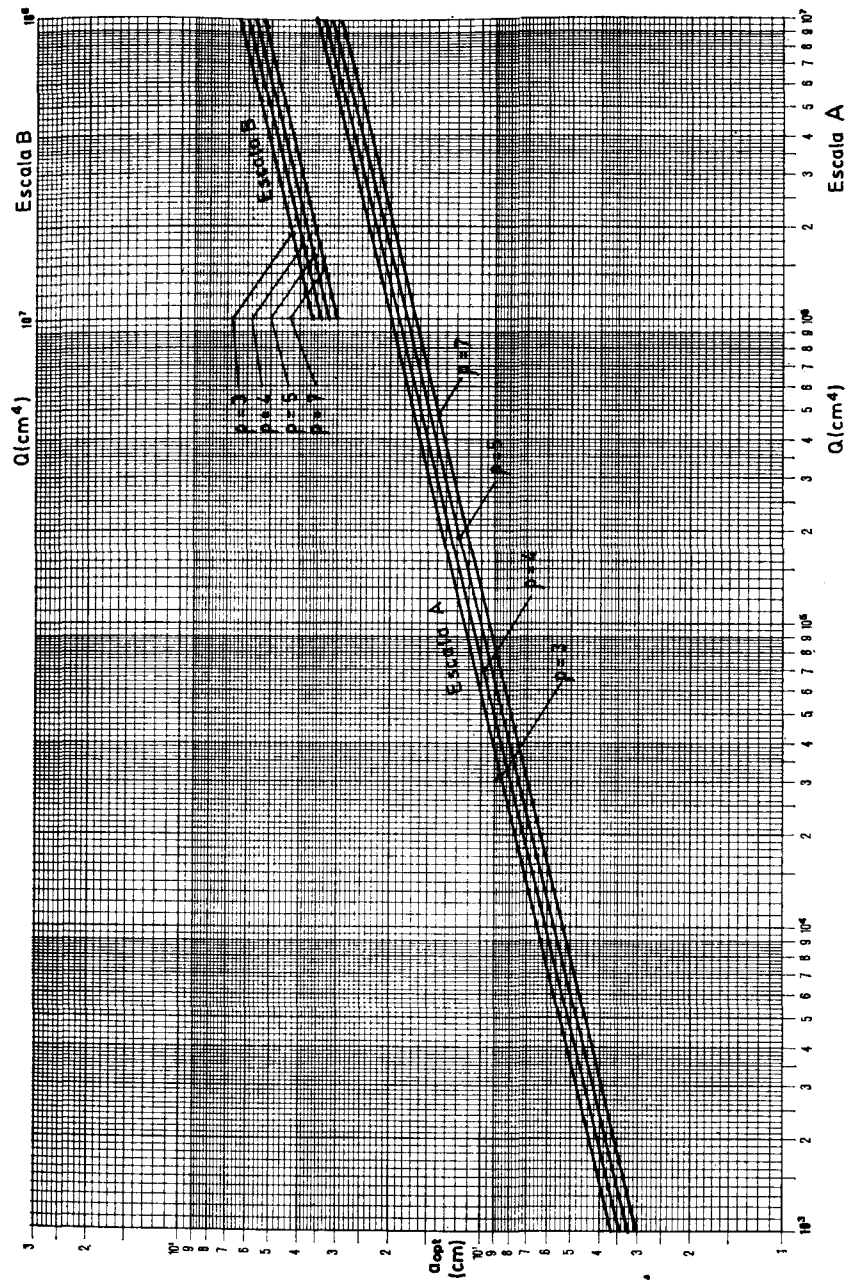


Fig. 2.8. Anchura óptima de ventana a_{opt} según la cuántica Q del transformador $Q = \rho_K$ o ρ_K según el criterio de optimización.

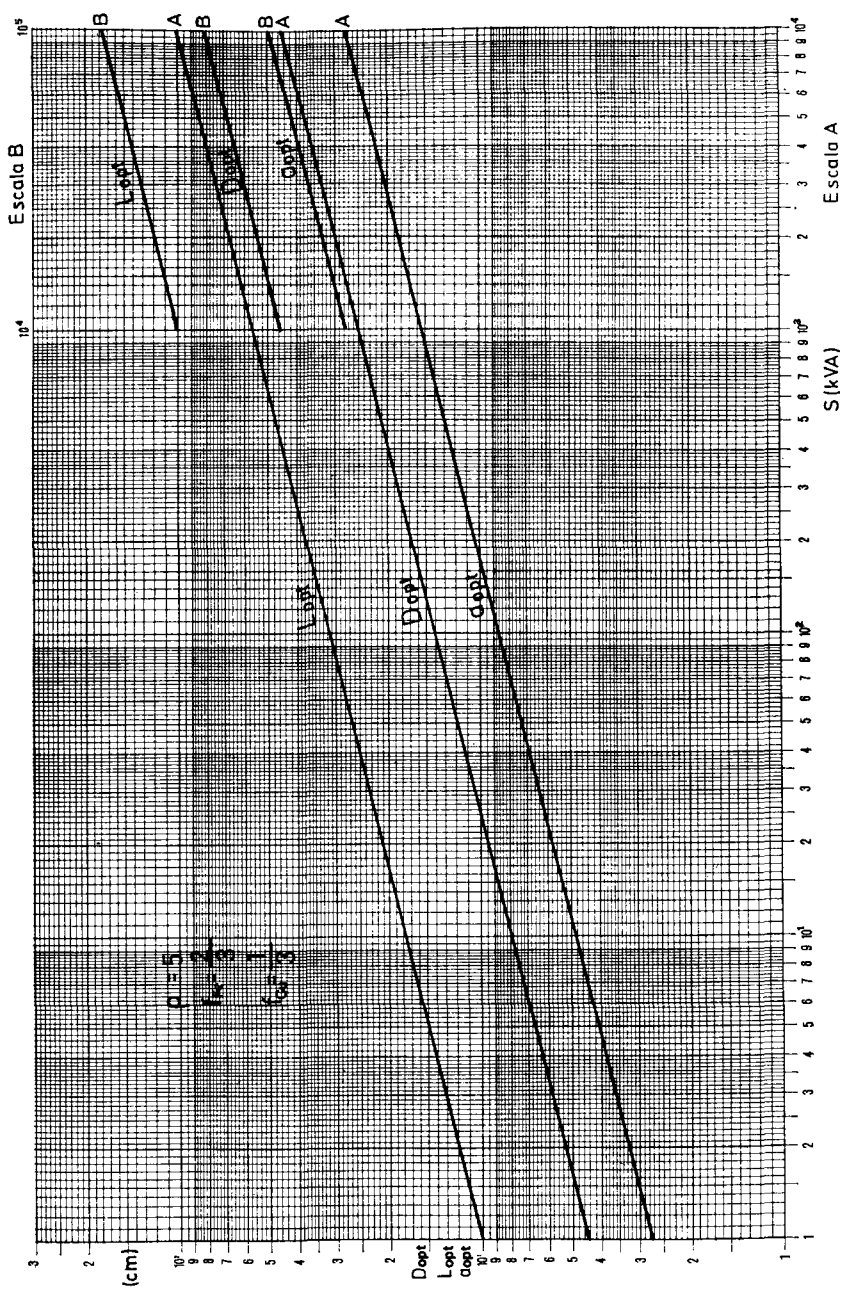


Fig. 2.9. Dimensiones óptimas (orientativas) en función de la potencia aparente (S) $Q = \rho_K$ o ρ_K según el criterio de optimización.

construcciones previamente realizadas y en todo caso, siempre cabe hacer un tanteo previo y afinar después los resultados.

Cuando el transformador lleva tomas de regulación, deberá efectuarse el cálculo de f_{cu} para la toma correspondiente a las características nominales.

Como a igualdad de $Q = D^2 La$ la potencia posible S depende proporcionalmente de f_{cu} y el margen de variación de este factor es, según vemos, bastante amplio, no cabe el disponer de una solución determinada para las dimensiones óptimas del transformador en función de la potencia, como se puede lograr en función de Q . No obstante, la figura 2.9, contiene, a título de referencia sólo para anteproyectos, las curvas de diámetro D y longitud L más favorables con el parámetro general $\rho_k = 5$ y supuesto el factor de utilización de la ventana $f_{cu} = \frac{1}{3}$. Esta figura es, pues, meramente, indicativa. (Véase Apéndice 7.)

2.7. Ejercicio 4. Transformador común

Vamos a tomar como base, a fin de poder comparar mejor los resultados según distintos criterios, un transformador trifásico, ya proyectado, de las siguientes características.¹

2000 kVA, 30 000 ± 5 %/400 - 231 V, 50 Hz

Las dimensiones y coeficientes de trabajo se dan a continuación.

2.7.1. Dimensiones básicas del núcleo

Sección del núcleo: 5 escalones según figura 2.3-e.

- Diámetro circunscrito al núcleo	$D = 27$ cm
- Altura de ventana	$L = 72$ cm
- Anchura de ventana	$a = 21$ cm
- Sección de ventana	$(La) = 1512$ cm ²
- Cuártica del transformador	$Q = D^2 La = 1100 \cdot 10^3$ cm ⁴

2.7.2. Dimensiones y coeficientes de trabajo

- Factor de utilización del núcleo (fig. 2.3-e)	$f_{Fe} = 0,655$
- Coeficiente del yugo (fig. 2.3-e)	$f_y = 5,564$
- Densidad de corriente en el devanado de B.T.	$J_1 = 3,04$ A/mm ²

¹ Este transformador se halla estudiado detalladamente en la obra del autor: «Cálculo Industrial de Máquinas Eléctricas». Tomo II, capítulo 2.10. Universidad Politécnica de Barcelona, Marcombo, 1976.

- Densidad de corriente en el devanado de A.T.	$J_2 = 2,92$ A/mm ²
- Inducción en el núcleo	$B = 16,75$ kG
- Peso específico de la plancha magnética	$\gamma_{Fe} = 7,65$ kp/dm ³
- Peso específico del cobre	$\gamma_{cu} = 8,9$ kp/dm ³
- Sección del arrollamiento de B.T.	$A_1 = 123,5$ cm ²
- Sección del arrollamiento de A.T. en la toma normal	$A_2 = 128,5$ cm ²
- Sección total de cobre por fase	$A_{cu} = A_1 + A_2 = 252$ cm ²
- Diámetro medio del arrollamiento de B.T.	$D_1 = 30,34$ cm
- Diámetro medio del arrollamiento de A.T.	$D_2 = 41,16$ cm
- Diámetro medio de la entrecara entre baja y alta tensión	$D_0 = 34,84$ cm
- Grosor radial del arrollamiento de B.T.	$e_1 = 2,28$ cm
- Grosor radial del arrollamiento de A.T.	$e_2 = 4,12$ cm
- Grosor radial de la entrecara B.T.-A.T.	$e_0 = 2,21$ cm
- Longitud axial de la B.T.	$l_1 = 62,78$ cm
- Longitud axial de la A.T.	$l_2 = 68,40$ cm

En la figura 2.7.1 se muestra esquemáticamente la distribución radial de la ventana.

2.7.3. Calculemos las constantes del transformador

- Coeficiente de utilización de la ventana [2.3-3]

$$f_{cu} = \frac{2(A_1 + A_2)}{La} = \frac{2A_{cu}}{La} = \frac{2 \times 252}{1512} = 0,334$$

- Densidad media de corriente [2.3-1]

$$J = \frac{J_1 A_1 + J_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{3,04 \cdot 123,5 + 2,92 \cdot 128,5}{252} = 2,98 \text{ A/mm}^2$$

- Coeficiente de potencia específica [2.5-20]

$$C_s = \frac{f f_{Fe} f_{cu}}{300 \cdot 10^3} (BJ) = \frac{50 \cdot 0,655 \cdot 0,334}{300 \cdot 10^3} (16,75 \cdot 2,98) = 1,82 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kVA}}{\text{cm}^4}$$

De aquí que la cuártica necesaria del transformador sea como hemos comprobado [2.5-19]

$$Q = \frac{S}{C_s} = \frac{2000}{1,82 \cdot 10^{-3}} = 1100 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

— Coeficiente específico de peso para el hierro [2.5-8]

$$C'_{Fe} = \frac{\gamma_{Fe} f_{Fe}}{1000} = \frac{7,65 \cdot 0,655}{1000} = 5,01 \cdot 10^{-3} \text{ kp/cm}^3$$

— Relación para el diámetro efectivo de los bobinados [2.3-12]

$$\rho_D = \frac{2(D_1 A_1 + D_2 A_2)}{(2D + a) A_{Cu}} = \frac{2(30,34 \cdot 123,5 + 41,16 \cdot 128,5)}{(2 \cdot 27 + 21) 252} = 0,9575$$

Coeficiente específico de peso para el cobre [2.5-9]

$$C'_{Cu} = \frac{2,356 \gamma_{Cu} f_{Cu} \rho_D}{1000} = \frac{2,356 \cdot 8,9 \cdot 0,334 \cdot 0,9575}{1000} = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ kp/cm}^3$$

— Pérdidas específicas en el hierro. Con la calidad de chapa (grano orientado) empleada y la inducción de trabajo, las pérdidas ascienden a

$$k_B = 2,46 \text{ W/kp}$$

— Densidad eficaz de pérdidas en el cobre [2.3-17]

$$J_w^2 = \frac{(D_1 A_1) J_1^2 + (D_2 A_2) J_2^2}{D_1 A_1 + D_2 A_2} = \frac{30,34 \cdot 123,5 \cdot 3,04^2 + 41,16 \cdot 128,5 \cdot 2,92^2}{30,34 \cdot 123,5 + 41,16 \cdot 128,5} = 8,83 \text{ (A/mm}^2\text{)}^2$$

$$J_w = \sqrt{8,83} = 2,97 \text{ A/mm}^2$$

Vemos que prácticamente coincide con la densidad de corriente media $J = 2,98 \text{ A/mm}^2$. Así sucede casi siempre, por lo cual puede omitirse en general el cálculo de J_w .

— Pérdidas específicas en el cobre. Tomando como promedio, a 75°C , incluidas las pérdidas adicionales, el coeficiente 2,7 de la fórmula [2.3-16a]

$$k_J = 2,7 J_w^2 = 2,7 \cdot 8,83 = 23,8 \text{ W/kp}$$

— Coeficiente específico para las pérdidas en el hierro [2.5-8]

$$C_{Fe} = k_B C'_{Fe} = 2,46 \cdot 5,01 \cdot 10^{-3} = 12,35 \cdot 10^{-3} \text{ W/cm}^3$$

— Coeficiente específico para las pérdidas en el cobre [2.5-9]

$$C_{Cu} = k_J C'_{Cu} = 23,8 \cdot 6,7 \cdot 10^{-3} = 159,5 \cdot 10^{-3} \text{ W/cm}^3$$

2.7.4. Pesos, pérdidas y precios del transformador

— Peso del hierro [2.5-10]

$$\begin{aligned} G_{Fe} &= C'_{Fe} (f_y D^3 + 4a D^2 + 3LD^2) \\ &= 5,01 \cdot 10^{-3} (5,564 \cdot 27^3 + 4 \cdot 21 \cdot 27^2 + 3 \cdot 72 \cdot 27^2) \\ &= 5,01 \cdot 10^{-3} (328,6 \cdot 10^3) = 1645 \text{ kp} \end{aligned}$$

— Peso del cobre [2.5-11]

$$\begin{aligned} G_{Cu} &= C'_{Cu} (La) (2D + a) \\ &= 6,7 \cdot 10^{-3} \cdot 1512 (2 \cdot 27 + 21) \\ &= 6,7 \cdot 10^{-3} (103,4 \cdot 10^3) = 760 \text{ kp} \end{aligned}$$

— Pérdidas en el hierro

$$p_{Fe} = k_B G_{Fe} = 2,46 \cdot 1645 = 4050 \text{ W}$$

— Pérdidas en el cobre a P.C.

$$p_{Cu} = k_J G_{Cu} = 23,8 \cdot 760 = 18100 \text{ W}$$

— Pérdidas totales a P.C.

$$p_t = p_{Fe} + p_{Cu} = 4050 + 18100 = 22150 \text{ W}$$

— Precio de venta en fábrica (chapa y cobre).

Admitiendo que resulta $\varphi_{Fe} = 60 \text{ ptas/kp}$ de núcleos y $\varphi_{Cu} = 240 \text{ ptas/kp}$ de bobinas montadas sobre el mismo [2.5-2],

$$v = \varphi_{Fe} G_{Fe} + \varphi_{Cu} G_{Cu} = 60 \cdot 1645 + 240 \cdot 760 = 281200 \text{ ptas}$$

— Precio de capitalización. Tomando las cifras de UNESA $\psi_{Fe} = 45 \text{ ptas/W}$ de pérdidas en el hierro y $\psi_{Cu} = 12 \text{ ptas/W}$ de pérdidas en el cobre [2.5-3],

$$z = \psi_{Fe} p_{Fe} + \psi_{Cu} p_{Cu} = 45 \cdot 4050 + 12 \cdot 18100 = 399400 \text{ ptas}$$

— Precio financiero [2.5-4],

$$F = v + z = 281200 + 399400 = 680600 \text{ ptas}$$

2.7.5. Reactancia de cortocircuito

Como complemento, para mejor conocer las características técnicas de este transformador, hallemos también su caída por reactancia de cortocircuito.

Sección relativa de dispersión [2.3-22a]

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{4}{3} \frac{D_1 e_1 + D_2 e_2 + 3 D_0 e_0}{(2 D + a) a} = \\ &= \frac{4}{3} \frac{30,34 \cdot 2,28 + 41,16 \cdot 4,12 + 3 \cdot 34,84 \cdot 2,21}{(2 \cdot 27 + 21) 21} = \\ &= 0,398 \end{aligned}$$

— Longitud relativa ρ_L del circuito de dispersión [2.3-19]. Para la longitud equivalente L_{eq} podemos escribir con bastante aproximación

$$L_{eq} = \frac{l_1 + l_2}{2} + (e_1 + e_2) = \frac{62,78 + 68,4}{2} + (2,28 + 4,12) = 72 \text{ cm}$$

$$\rho_L = \frac{L_{eq}}{L} = \frac{72}{72} = 1$$

— Factor de caída relativa de reactancia C_x [2.3-26],

$$C_x = 3,528 \frac{\rho_x}{\rho_L} \frac{f_{Cu}}{f_{Fe}} \frac{J}{B} = 3,528 \frac{0,398}{1} \frac{0,334}{0,655} \frac{2,98}{16,75} = 0,1275$$

— Caída de reactancia¹ en % de la T.N. [2.3-25],

$$u_x = C_x \left(\frac{a}{D} \right)^2 (2 D + a) = 0,1275 \left(\frac{21}{27} \right)^2 (2 \cdot 27 + 21) = 5,76 \%$$

2.8. Ejercicio 5. Cálculo del transformador de mínimo precio de venta

2.8.1. Dimensiones del núcleo

A efectos comparativos, mantendremos invariable el número de escalones del núcleo, y por tanto, los factores del hierro f_{Fe} y f_y ; los coeficientes de trabajo magnéticos B y eléctrico J tampoco se modifican y las variaciones que hayan de introducirse en las dimensiones proporcionales del transformador, aunque influirán sin duda no pueden alterar de un modo apreciable el factor de ventana² f_{Cu} ni la relación ρ_D para el diámetro efectivo; la densidad de pérdidas J_w y, por tanto, las pérdidas específicas del cobre k_J en W/kp per-

¹ El cálculo más minucioso de esta caída en la obra citada conducía a la cifra 5,67 %, lo que coincide prácticamente con la de 5,76 % aquí hallada, dado el grado de exactitud alcanzable en la evaluación de dicha característica.

² En realidad, como el cobre disminuye, según veremos, en proporción apreciable, pero no las distancias de aislamiento, f_{Cu} experimenta una cierta reducción, la que hace el cálculo comparativo siguiente un tanto optimista.

manecerán invariables, lo mismo que las del hierro k_B al conservarse la inducción B .

De este modo el coeficiente de potencia aparente C_S y la cuártica consiguiente Q (fórmulas, 2.5-19 y 2.5-20) habrán de ser las mismas que en el transformador corriente

$$Q = 1100 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

Continuarán siendo iguales también los factores específicos de peso para el hierro C'_{Fe} y para el cobre C'_{Cu} (fórmulas [2.5-8] y [2.5-9]),

$$C'_{Fe} = 5,01 \cdot 10^{-3} \text{ kp/cm}^3 \quad C'_{Cu} = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ kp/cm}^3$$

Dados los precios de venta supuestos $\varphi_{Fe} = 60$ ptas/kp y $\varphi_{Cu} = 240$ ptas/kp tendremos como parámetro ρ_k [2.6-6],

$$\rho_k = \frac{k_{Cu}}{k_{Fe}} = \frac{C'_{Cu}}{C'_{Fe}} \frac{\varphi_{Cu}}{\varphi_{Fe}} = \frac{6,7 \cdot 10^{-3}}{5,01 \cdot 10^{-3}} \frac{240}{60} = 5,35$$

Para $Q = 1100 \cdot 10^3$ y $\rho_k = 5,35$ las figuras 2.6 y 2.7 nos dan como diámetro D y longitud L óptimos, exclusivamente desde el punto de vista del precio de venta,

$$D = 31 \text{ cm} \quad L = 65 \text{ cm}$$

de donde

$$a = \frac{Q}{D^2 L} = \frac{1100 \cdot 10^3}{31^2 \cdot 65} = 17,6 \text{ cm}$$

$$La = 65 \cdot 17,6 = 1143 \text{ cm}^2$$

ventana mucho menor de la que lleva el transformador corriente (1512 cm²).

2.8.2. Pesos, pérdidas y precios del transformador

Pesos [2.5-10] y [2.5-11],

$$\begin{aligned} G_{Cu} &= C'_{Fe} (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 LD^2) \\ &= 5,01 \cdot 10^{-3} (5,564 \cdot 31^3 + 4 \cdot 17,6 \cdot 31^2 + 3 \cdot 65 \cdot 31^2) \\ &= 2110 \text{ kp} \end{aligned}$$

contra 1645 kp anteriormente,

$$\begin{aligned} G_{Cu} &= C'_{Cu} (La) (2 D + a) \\ &= 6,7 \cdot 10^{-3} (1143) (2 \cdot 31 + 17,6) \\ &= 610 \text{ kp} \end{aligned}$$

frente a los 760 del transformador original.

Precio de venta [2.5-2]. Conservando los mismos precios unitarios $\varphi_{Fe} = 60$ ptas/kp y $\varphi_{Cu} = 240$ ptas/kp,

$$\begin{aligned} \nu &= \varphi_{Fe} G_{Fe} + \varphi_{Cu} G_{Cu} = 60 \cdot 2110 + 240 \cdot 610 = 126\,600 + 146\,500 = \\ &= 273\,100 \text{ ptas} \end{aligned}$$

contra 281 200 ptas en el transformador corriente, escasamente un 3 % de economía. Pero es que, además, en cuanto al importe de la capitalización, tendremos:

Pérdidas

$$p_t = k_B G_{Fe} + k_J G_{Cu} = 2,46 \cdot 2110 + 23,8 \cdot 610 = 5200 + 14\,500 = 19\,700 \text{ W}$$

Nótese que las pérdidas totales se reducen de 22 150 a 19 700 W, algo más de un 10 %, lo que comporta accesoriamente una reducción adicional apreciable en el coste del sistema de ventilación.

Sin embargo, la capitalización de las pérdidas apenas varía debido al notable incremento que han sufrido las pérdidas en el hierro (de 4050 a 5200),

$$\begin{aligned} \kappa &= \psi_{Fe} p_{Fe} + \psi_{Cu} p_{Cu} = 45 \cdot 5200 + 12 \cdot 14\,500 = 234\,000 + 174\,000 = \\ &= 408\,000 \text{ ptas} \end{aligned}$$

contra 399 400 ptas, 1,8 % más; y el costo financiero queda en

$$F = \nu + \kappa = 273\,100 + 408\,000 = 681\,100$$

El del transformador convencional llegaba a 680 600 ptas obteniéndose, pues, en este caso, prácticamente el mismo resultado.

Las propiedades del transformador más económico de fabricación con respecto al corriente se caracterizan, pues, por una reducción moderada del precio de venta y, aumento insensible del precio financiero, un incremento considerable en el peso y en las pérdidas en el hierro, pero una reducción mucho más fuerte en las pérdidas del cobre. Paradójicamente, las pérdidas totales son las que resultan más beneficiadas por el transformador de mínimo costo de fabricación, lo cual viene a reducir aún más este precio como consecuencia de la economía en el sistema de refrigeración.

Resulta, pues, un transformador más atrayente desde el punto exclusivo de los precios de oferta, pero en realidad carente de interés especial para el usuario.

El acortamiento de la altura L de la ventana desde 72 a 65 cm y de su anchura desde 21 a 17,6 cm afecta en más alto grado a la caída de reactancia, con tendencia a disminuirla.

Veamos:

2.8.3. *Caída relativa de reactancia*

Los factores de sección y longitud relativas de dispersión vendrán en general algo modificados por el cambio de proporciones del núcleo. Vamos a calcularlos de nuevo.

En el transformador común con ventana de $a = 21$ cm y grosores de bobinados $e_1 = 2,28$ y $e_2 = 4,12$ cm, total

$$2(e_1 + e_2) = 2(2,28 + 4,12) = 12,8 \text{ cm},$$

quedaba un espacio radial de aislamientos distanciadores igual a

$$21 - 12,8 = 8,2 \text{ cm}$$

los cuales se distribuyen como sigue (fig. 2.7.1),

$$\left. \begin{array}{l} 0,53 \text{ cm entre núcleo y B.T.} \\ 2,21 \text{ cm entre B.T. y A.T.} \\ 2,72 \text{ cm entre A.T. y A.T.} \end{array} \right\} 2(0,53 + 2,21) + 2,72 = 8,2 \text{ cm}$$

distancias que habremos de respetar si no queremos alterar las condiciones dieléctricas.

Con $a = 17,6$ cm de ventana, quedarán entonces para el cobre, radialmente,

$$17,6 - 8,2 = 9,4 \text{ cm}$$

y este espesor radial lo supondremos repartido en la misma proporción que antes entre ambos devanados

$$e_1 = 2,28 \frac{9,4}{12,8} = 1,675 \text{ cm}$$

$$e_2 = 4,12 \frac{9,4}{12,8} = 3,03 \text{ cm}$$

lo cual nos da para los respectivos diámetros medios

$$D_1 = 31 + 2 \cdot 0,53 + 1,675 = 33,74 \text{ cm}$$

$$D_0 = 33,74 + 1,675 + 2,21 = 37,63 \text{ cm}$$

$$D_2 = 37,63 + 2,21 + 3,03 = 42,87 \text{ cm}$$

Por lo que respecta a las longitudes del circuito de dispersión con las columnas, los bobinados y los espesores de bobina acortados, el coeficiente ρ_L siempre muy próximo a 1 podemos admitir que no haya variado

$$\rho_L = 1$$

Para ρ_x [2.3-22a],

$$\rho_x = \frac{4}{3} \frac{D_1 e_1 + D_2 e_2 + 3 D_0 e_0}{(2 D + a) a}$$

$$= \frac{4}{3} \frac{33,74 \cdot 1,675 + 42,87 \cdot 3,03 + 3 \cdot 37,63 \cdot 2,21}{(2 \cdot 31 + 17,6) 17,6} = 0,415$$

(antes, 0,398) de donde el factor de caída relativa [2.3-26]

$$C_x = 3,528 \frac{\rho_x}{\rho_L} \frac{f_{Cu}}{f_{Fe}} \frac{J}{B} = 3,528 \frac{0,415}{1} \frac{0,334}{0,655} \frac{2,98}{16,75} = 0,133$$

y la caída porcentual de reactancia (2.3-25)

$$u_x^* = C_x \left(\frac{a}{D} \right)^2 (2 D + a) = 0,133 \left(\frac{17,6}{31} \right)^2 (2 \cdot 31 + 17,6) = 3,4 \%$$

en vez de 5,76 % en el transformador convencional.

Es también la reactancia una de las características más alteradas por el transformador de mínimo costo de fabricación, cuya abundancia de hierro y limitación de cobre contribuye a bajar la cifra hasta unos límites por regla general inconvenientes.

2.9. Transformador de mínimo precio financiero (transformador óptimo)

Volviendo a las ecuaciones de la cuártica [2.5-19],

$$Q = D^2 La \quad [2.9-1]$$

y a la del coste financiero [2.5-16],

$$F = K_{Fe} (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 LD^2) + K_{Cu} (La) (2 D + a) \quad [2.9-2]$$

vemos que esta última fórmula sólo se diferencia de la del precio de venta v [2.5-12], en la sustitución de los coeficientes ante los paréntesis, k_{Fe} y k_{Cu} por K_{Fe} y K_{Cu} [2.5-17] y [2.5-18], todos ellos puras constantes, cuando se trata de buscar las dimensiones óptimas D , L y a .

El mismo proceso matemático nos llevará, pues, a idénticas condiciones de optimación [2.6-7] y [2.6-4],

$$A^3 + AA^2 + BA - C = 0 \cdot \quad [2.9-3]$$

$$L^2 = \frac{4}{3} \frac{Q}{D^2} + \frac{1}{3} \frac{\rho_K Q^2}{D^6} \quad [2.9-4]$$

poniendo ahora simplemente [2.5-17] y [2.5-18],

$$\rho_K = \frac{K_{Cu}}{K_{Fe}} = \frac{C'_{Cu}}{C'_{Fe}} \frac{\varphi_{Cu} + k_J \psi_{Cu}}{\varphi_{Fe} + k_B \psi_{Fe}} \quad [2.9-5]$$

y

$$D = \sqrt[3]{A} \quad [2.9-6]$$

así como [2.6-8] a [2.6-10],

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\rho_K}{f_y} \left(\frac{f_y}{4} - \frac{16}{3 \rho_K f_y} - \frac{4}{3} \right) Q \end{aligned} \right. \quad [2.9-7]$$

$$\left\{ \begin{aligned} B &= \left(\frac{\rho_K}{f_y} \right)^2 \left(\frac{8}{\rho_K} - \frac{f_y}{3} + \frac{4}{9} \right) Q^2 \end{aligned} \right. \quad [2.9-8]$$

$$\left\{ \begin{aligned} C &= \left(\frac{\rho_K}{f_y} \right)^3 f_y \left(\frac{1}{3 \rho_K} - \frac{1}{9} \right) Q^3 \end{aligned} \right. \quad [2.9-9]$$

Como quiera que los gráficos de las figuras 2.6, 2.7 y 2.8 dan los valores de las dimensiones óptimas D , L y a en función de Q sin que intervengan otros parámetros distintos que ρ_k o ρ_K en las expresiones formalmente idénticas de A , B y C , las mismas curvas sirven para este caso con sólo entrar en ellas por el valor de referencia ρ_K en lugar de ρ_k .

2.10. Ejercicio 6. Cálculo del transformador de mínimo precio financiero

2.10.1. Dimensiones óptimas del núcleo

Con los mismos coeficientes de trabajo, habrá que mantener la misma cuártica

$$Q = D^2 La = 1100 \cdot 10^3 \text{ cm}^4 \quad [2.10-1]$$

pero el coeficiente mixto a tener ahora en cuenta será [9.5],

$$\rho_K = \frac{K_{Cu}}{K_{Fe}} = \frac{C'_{Cu}}{C'_{Fe}} \frac{\varphi_{Cu} + k_J \psi_{Cu}}{\varphi_{Fe} + k_B \psi_{Fe}} \quad [2.10-2]$$

Los factores específicos de peso para el cobre y para el hierro seguirán prácticamente invariables [2.5-9] y [2.5-8], así como las pérdidas específicas en W/kp,

$$C'_{Cu} = \frac{2,356 \gamma_{Cu} f_{Cu} \rho_D}{1000} = 6,7 \cdot 10^{-3}; \quad k_J = 23,8 \text{ W/kp de Cu}$$

$$C'_{Fe} = \frac{\gamma_{Fe} f_{Fe}}{1000} = 5,01 \cdot 10^{-3}; \quad k_B = 2,46 \text{ W/kp de Fe}$$

Si adoptamos los mismos precios de venta en fábrica por kp de Cu y por kp de Fe.

$$\varphi_{Cu} = 240 \text{ ptas/kp de Cu}$$

$$\varphi_{Fe} = 60 \text{ ptas/kp de Fe}$$

así como los factores de capitalización UNESA

$$\psi_{Cu} = 12 \text{ ptas/W de pérdidas en el Cu}$$

$$\psi_{Fe} = 45 \text{ ptas/W de pérdidas en el Fe}$$

tendremos

$$\rho_K = \frac{6,7 \cdot 10^{-3}}{5,01 \cdot 10^{-3}} \frac{240 + 23,8 \cdot 12}{60 + 2,46 \cdot 45} = 1,34 \cdot 3,09 = 4,12$$

Acudiendo, pues, con los valores $Q = 1100 \cdot 10^3$ y $\rho_K = 4,12$ a los gráficos de las figuras 2.6 y 2.7 tendremos ahora para el diámetro del núcleo y la longitud de ventana óptimos (repetimos debajo, entre paréntesis, las cifras del transformador convencional):

$$D = 28,5 \text{ cm} \quad L = 69 \text{ cm}$$

(27) (72)

y

$$a = \frac{Q}{D^2 L} = \frac{1100 \cdot 10^3}{28,5^2 \cdot 69} = 19,6 \text{ cm}$$

(21)

$$La = 69 \cdot 19,6 = 1354 \text{ cm}^2$$

(1512)

2.10.2. Pesos, pérdidas y precios

Pesos [2.5-10] y [2.5-11],

$$G_{Fe} = C'_{Fe} (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 L D^2)$$

$$= 5,01 \cdot 10^{-3} (5,564 \cdot 28,5^3 + 4 \cdot 19,6 \cdot 28,5^2 + 3 \cdot 69 \cdot 28,5^2) = 1805 \text{ kp}$$

(1645)

$$G_{Cu} = C'_{Cu} (La) (2 D + a) = 6,7 \cdot 10^{-3} (1354) (2 \cdot 28,5 + 19,6) = 695 \text{ kp}$$

(760)

Precio de venta

$$v = \varphi_{Fe} G_{Fe} + \varphi_{Cu} G_{Cu} = 60 \cdot 1805 + 240 \cdot 695 = 108\ 300 + 167\ 000 =$$

$$= 275\ 300 \text{ ptas}$$

(281\ 200)

Pérdidas

$$p_t = k_B G_{Fe} + k_J G_{Cu} = 2,46 \cdot 1805 + 23,8 \cdot 695 = 4430 + 16\ 540 = 20\ 970 \text{ W}$$

(4050) (18\ 100) (22\ 150)

Capitalización de las pérdidas

$$\kappa = \psi_{Fe} p_{Fe} + \psi_{Cu} p_{Cu} = 45 \cdot 4430 + 12 \cdot 16\ 540 = 199\ 000 + 198\ 000 = 397\ 000 \text{ ptas}$$

(182\ 400) (217\ 000) (399\ 400)

Precio financiero

$$F = v + \kappa = 275\ 300 + 397\ 000 = 672\ 300 \text{ ptas}$$

(281\ 200) (399\ 400) (680\ 600)

1,73 % inferior, aparte la economía en el sistema de refrigeración por las pérdidas totales, también inferiores, lo cual no es despreciable.

2.10.3. Comprobemos finalmente la «caída de reactancia» del transformador óptimo

La anchura de ventana del transformador convencional $a = 21$ cm vimos que distribuida entre bobinas y aislantes según la figura 2.7.1, concedía (párrafo 2.8.3), $12,8 \text{ cm} = 2(2,28 + 4,12)$ para las bobinas y

$$8,2 \text{ cm} = 2(0,53 + 2,21) + 2,72 \text{ para las distancias aislantes.}$$

Manteniendo estas últimas separaciones, nos quedan ahora para las bobinas, con la anchura $a = 19,6$ cm,

$$19,6 - 8,2 = 11,4 \text{ cm}$$

que repartiremos entre ambos arrollamientos en la proporción primitiva. El grosor de las bobinas era

$$2,28 \text{ cm para la B.T.}$$

$$4,12 \text{ cm para la A.T.}$$

valores que pasarán, pues a

$$e_1 = 2,28 \frac{11,4}{12,8} = 2,07 \text{ cm}$$

$$e_2 = 4,12 \frac{11,4}{12,8} = 3,67 \text{ cm}$$

y los diámetros medios respectivos con núcleo de 28,5 cm = D,

$$D_1 = 28,5 + 2 \cdot 0,53 + 2,07 = 31,63 \text{ cm}$$

$$D_0 = 31,63 + 2,07 + 2,21 = 35,91 \text{ cm}$$

$$D_2 = 35,91 + 2,21 + 3,67 = 41,79 \text{ cm}$$

La longitud del circuito magnético de dispersión L_{eq} podemos suponer que permanece igual con respecto a la del núcleo y tomar como antes $\rho_L = 1$.

En cuanto a ρ_x [2.3-22a],

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{4}{3} \frac{D_1 e_1 + D_2 e_2 + 3 D_0 e_0}{(2 D + a) a} = \\ &= \frac{4}{3} \frac{31,63 \cdot 2,07 + 41,79 \cdot 3,67 + 3 \cdot 35,91 \cdot 2,21}{(2 \cdot 28,5 + 19,6) 19,6} = 0,402 \end{aligned}$$

de donde el factor de reactancia relativa [2.3-26],

$$C_x = 3,528 \frac{\rho_x f_{Cu}}{\rho_L f_{Fe}} \frac{J}{B} = 3,528 \frac{0,402}{1} \frac{0,334}{0,655} \frac{2,98}{16,75} = 0,129$$

y la caída de reactancia en % [2.3-25],

$$u_x^* = C_x \left(\frac{a}{D} \right)^2 (2 D + a) = 0,129 \left(\frac{19,6}{28,5} \right)^2 (2 \cdot 28,5 + 19,6) = 4,65 \%$$

valor perfectamente normal.

2.11. Resumen comparativo

Para mejor comparar los resultados, damos a continuación una tabla de los valores más característicos en cada una de las soluciones aportadas.

Tabla comparativa de resultados

Transformador	D	L	a	G_{Fe}	G_{Cu}	p_{Fe}	p_{Cu}	P_t	u_x^*	ν	$\Delta\nu$	κ	F	ΔF	
	cm	cm	cm	k_p	k_p	W	W	W	%	Miles ptas.	Miles ptas.	Miles ptas.	Miles ptas.	Miles ptas.	%
Comercial	27	72	21	1645	760	4050	18 100	22 150	5,76	281,2	+ 5,9	399,4	680,6	+ 8,3	1,24
Mínimo coste	31	65	17,6	2110	610	5200	14 500	19 700	3,4	273,2	- 2,1	408,0	681,3	+ 9,0	1,34
Óptimo financ.	28,5	69	19,6	1805	695	4430	16 540	20 970	4,65	275,3	0	397,0	672,3	0	0

Se observa que, no obstante su empirismo, el transformador comercial, resultado de experiencias económicas acumuladas durante muchos años, no difiere de una manera sensible del transformador óptimo. El transformador de mínimo precio de oferta no es aconsejable, ya que sin provocar una rebaja apreciable del valor en venta (aunque sí mayor que la que figura en la tabla, debido a la influencia no computada en la misma del costo de la cuba o sistema de refrigeración) excede en capitalización de pérdidas y conduce a una reactancia de cortocircuito demasiado baja.

Cuando se dispone de antecedentes bien elaborados por referirse a tipos comunes, la aplicación del método de optimación no altera sustancialmente las cifras que venían obteniéndose. Otra cosa ocurriría con tipos de improvisación intuitiva o sin experiencia previa acerca de la economía de los mismos. Entonces el procedimiento conduce sin vacilaciones a la mejor solución; sin embargo, su aplicación es tan simple en todos los casos que realmente no hay por qué omitirlo en ninguno de ellos.

3

Apéndices

3.1. Apéndice 1

Deducción de las fórmulas [2.6-4] y [2.6-5] sobre la longitud de ventana L y el diámetro óptimos D .

Tomamos [2.6-1],

$$Q = D^2 La \quad [\text{A.1-1}]$$

y [2.6-2],

$$v = k_{Fe} (f_y D^3 + 4 a D^2 + 3 LD^2) + k_{Cu} (La) (2 D + a)$$

Despejando a de la primera y sustituyéndola en la segunda,

$$a = \frac{Q}{D^2 L},$$

$$\begin{aligned} v &= k_{Fe} \left[f_y D^3 + 4 \frac{Q}{L} + 3 LD^2 \right] + k_{Cu} \frac{Q}{D^2} \left(2 D + \frac{Q}{D^2 L} \right) \\ &= k_{Fe} \left(f_y D^3 + 4 \frac{Q}{L} + 3 LD^2 \right) + k_{Cu} \left(\frac{2 Q}{D} + \frac{Q^2}{D^4 L} \right) \end{aligned} \quad [\text{A.1-2}]$$

Derivemos v respecto a L e igualemos a cero,

$$\frac{\partial v}{\partial L} = k_{Fe} \left(-\frac{4Q}{L^2} + 3 D^2 \right) + k_{Cu} \left(-\frac{Q^2}{D^4 L^2} \right) = 0$$

dividiendo por k_{Fe} ambos miembros y poniendo $\frac{k_{Cu}}{k_{Fe}} = \rho_k$,

$$3 D^2 - \frac{4 Q}{L^2} - \rho_k \frac{Q^2}{D^4 L^2} = 0$$

y multiplicando por $D^4 L^2$ para eliminar denominadores,

$$3 D^6 L^2 - 4 Q D^4 - \rho_k Q^2 = 0$$

de donde, como se enuncia en [2.6-4],

$$L^2 = \frac{4}{3} \frac{Q}{D^2} + \frac{1}{3} \frac{\rho_k Q^2}{D^6} \quad [A.1-3]$$

Derivemos ahora [A.1-2] respecto a D e igualemos también a cero

$$\frac{\partial v}{\partial D} = k_{Fe} (3 f_y D^2 + 6 LD) + k_{Cu} \left(-\frac{2Q}{D^2} - \frac{Q^2}{L} \frac{4 D^3}{D^8} \right) = 0$$

o sea

$$k_{Fe} (3 f_y D^2 + 6 LD) + k_{Cu} \left(-\frac{2Q}{D^2} - \frac{4 Q^2}{LD^5} \right) = 0$$

Eliminemos denominadores multiplicando por LD^5 todos los términos y dividamos de nuevo ambos miembros por k_{Fe} poniendo, de paso, otra vez

$$\rho_k = \frac{k_{Cu}}{k_{Fe}},$$

$$3 f_y LD^7 + 6 L^2 D^6 + \rho_k (-2 QLD^3 - 4 Q^2) = 0$$

lo que nos lleva inmediatamente a la ecuación [2.6-5],

$$L^2 D^6 + \frac{f_y}{2} LD^7 - \frac{\rho_k}{3} (QLD^3 + 2 Q^2) = 0 \quad [A.1-4]$$

3.2. Apéndice 2

Deducción de la ecuación cúbica en $\Lambda = D^4$ [2.6-7]

Establecido el sistema de 7.º grado y tres ecuaciones [A.1-1], [A.1-3] y [A.1-4], la primera, de condición física, y las dos últimas, de tipo económico, quedan determinadas las tres incógnitas D , L y a , procediéndose a buscar la solución como sigue.

En [A.1-3] multipliquemos ambos miembros por D^6 ,

$$L^2 D^6 = \frac{4}{3} Q D^4 + \frac{1}{3} \rho_k Q^2 \quad [A.2-1]$$

o también

$$LD^3 = \left(\frac{4}{3} Q D^4 + \frac{1}{3} \rho_k Q^2 \right)^{1/2} \quad [A.2-2]$$

La [A.1-4] puede escribirse

$$L^2 D^6 + \frac{f_y}{2} (LD^3) D^4 - \frac{\rho_k}{3} [Q (LD^3) + 2 Q^2] = 0 \quad [A.2-3]$$

Sustituyamos aquí $(L^2 D^6)$ y (LD^3) por sus expresiones respectivas [A.2-1] y [A.2-2] e introduzcamos la variable auxiliar

$$\Lambda = D^4$$

con lo cual

$$L^2 D^6 = \frac{4}{3} Q D^4 + \frac{1}{3} \rho_k Q^2 = \frac{Q^2}{3} \left(\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k \right) \quad [A.2-4]$$

y

$$LD^3 = \frac{Q}{\sqrt{3}} \left(\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k \right)^{1/2} \quad [A.2-5]$$

La fórmula [A.2-3] queda así en

$$\frac{Q^3}{3} \left(\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k \right) + \frac{f_y}{2} \frac{Q}{\sqrt{3}} \left(\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k \right)^{1/2} \Lambda - \frac{\rho_k}{3} \left[Q \frac{Q}{\sqrt{3}} \left(\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k \right)^{1/2} + 2 Q^2 \right] = 0$$

Simplifiquemos multiplicando primero por $\frac{3}{Q^2}$

$$\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{f_y}{Q} \left(\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k \right)^{1/2} \Lambda - \frac{\rho_k}{\sqrt{3}} \left(\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k \right)^{1/2} - 2 \rho_k = 0$$

Agrupemos factores comunes:

$$\frac{4 \Lambda}{Q} - \rho_k + \left(\frac{\sqrt{3} f_y}{2 Q} \Lambda - \frac{\rho_k}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k \right)^{1/2} = 0$$

Aún podemos simplificar multiplicando ambos miembros por $\frac{Q}{4}$ conservando en uno de ellos el término con exponente $1/2$,

$$\left(\frac{\sqrt{3} f_y}{8} \Lambda - \frac{\rho_k Q}{4 \sqrt{3}} \right) \left(\frac{4 \Lambda}{Q} + \rho_k \right)^{1/2} = \frac{\rho_k Q}{4} - \Lambda$$

Elevando ahora al cuadrado los dos miembros desaparece el radical y queda

$$\left(\frac{3f_y^2}{64} A^2 + \frac{\rho_k^2 Q^2}{16 \cdot 3} - \frac{2\sqrt{3}f_y \rho_k Q}{8 \cdot 4\sqrt{3}} A \right) \left(\frac{4A}{Q} + \rho_k \right) = \\ = \frac{\rho_k^2 Q^2}{16} + A^2 - \frac{2\rho_k Q}{4} A$$

Con ello hemos introducido una posible solución extraña al sistema original: la que resultaría de igualar a cero el factor utilizado

$$\frac{\rho_k Q}{4} - A$$

pero las soluciones falsas aparecen descartadas, por naturaleza, físicamente. Efectuando las multiplicaciones indicadas

$$\frac{3f_y^2}{16Q} A^3 + \frac{\rho_k^2 Q}{12} A - \frac{f_y \rho_k}{4} A^2 + \frac{3f_y^2 \rho_k}{64} A^2 + \frac{\rho_k^3 Q^2}{48} - \frac{f_y \rho_k^2 Q}{16} A = \\ = \frac{\rho_k^2 Q^2}{16} + A^2 - \frac{\rho_k Q}{2} A$$

Ordenemos según las potencias decrecientes de A ,

$$\left(\frac{3f_y^2}{16Q} \right) A^3 + \left(\frac{3f_y^2 \rho_k}{64} - \frac{f_y \rho_k}{4} - 1 \right) A^2 + \left(\frac{\rho_k^2 Q}{12} + \frac{\rho_k Q}{2} - \frac{f_y \rho_k^2 Q}{16} \right) A = \\ = \frac{\rho_k^2 Q^2}{16} - \frac{\rho_k^3 Q^2}{48}$$

Reduzcamos coeficientes para dejar en 1 el de A^3

$$A^3 + \left(\frac{\rho_k Q}{4} - \frac{4}{3} \frac{\rho_k Q}{f_y} - \frac{16}{3} \frac{Q}{f_y^2} \right) A^2 + \left(\frac{4}{9} \frac{\rho_k^2 Q^2}{f_y^2} + \frac{8}{3} \frac{\rho_k Q^2}{f_y^2} - \frac{\rho_k^2 Q^2}{3f_y} \right) A = \frac{\rho_k^2 Q^3}{3f_y^2} - \frac{1}{9} \frac{\rho_k^3 Q^3}{f_y^2}$$

y en última extracción de factores comunes,

$$A^3 + \left(\frac{\rho_k}{f_y} \right) \left(\frac{f_y}{4} - \frac{4}{3} - \frac{16}{3\rho_k f_y} \right) Q A^2 + \left(\frac{\rho_k}{f_y} \right)^3 \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{3\rho_k} - \frac{f_y}{3} \right) Q^2 A = \left(\frac{\rho_k}{f_y} \right)^3 f_y \left(\frac{1}{3\rho_k} - \frac{1}{9} \right) Q^3$$

ecuación que puesta en la forma genérica adoptada

$$A^3 + AA^2 + BA - C = 0$$

hace coincidir las expresiones de coeficientes A , B y C con las que se dan en [2.6-8], [2.6-9] y [2.6-10] según pretendíamos demostrar.

3.3. Apéndice 3

Análisis y solución de la cúbica

El diámetro óptimo tiene que deducirse por las raíces de la ecuación de 3.º grado [2.6-7]

$$A^3 + AA^2 + BA - C = 0 \quad [\text{A.3-1}]$$

la cual, como toda ecuación de este género, presentará como mínimo una raíz real y dos imaginarias, o bien, dos raíces reales una de ellas doble, o bien, las tres, reales; según la magnitud y signo de los coeficientes A , B y C [2.6-8] a [2.6-10],

$$A = \left(\frac{\rho_k}{f_y} \right) \left(\frac{f_y}{4} - \frac{16}{3\rho_k f_y} - \frac{4}{3} \right) Q = \left[\frac{\rho_k}{f_y} \right] Q A'$$

$$B = \left(\frac{\rho_k}{f_y} \right)^2 \left(\frac{8}{3\rho_k} - \frac{f_y}{3} + \frac{4}{9} \right) Q^2 = \left[\frac{\rho_k}{f_y} \right]^2 Q^2 B'$$

$$C = \left(\frac{\rho_k}{f_y} \right)^3 f_y \left(\frac{1}{3\rho_k} - \frac{1}{9} \right) Q^3 = \left[\left(\frac{\rho_k}{f_y} \right)^3 f_y \right] Q^3 C'$$

Q y los factores entre corchetes de los tres últimos miembros son esencialmente positivos. Veamos A' , B' y C' . Dependientes también del factor del yugo f_y y del parámetro relativo discriminador de precios y coeficientes de trabajo, ρ_k ; el primero varía entre 5,414 y 5,68 (fig. 2.3) y respecto al segundo, aún ampliado para optimar otras cualidades de los transformadores, no cabe contar con márgenes de variaciones por fuera del intervalo 3 ... 8.

Sustituyendo dichos límites en las expresiones de A' , B' y C' veríamos que las tres constantes son siempre negativas. Por tanto, la ecuación algebraica [A.3-1] adopta numéricamente la forma

$$A^3 - aA^2 - bA + c = 0 \quad [\text{A.3-2}]$$

Esta ecuación presenta dos variaciones de signo y tiene dos raíces positivas (la transformada en $-A$ presenta una sola variación de signos, indicadora de la tercera raíz, negativa, que no interesa). De aquellas dos raíces

positivas, la menor corresponde a un máximo de la ecuación implícita¹ en A^4 cuya derivada numérica sería la que acabamos de exponer; y la mayor, a un mínimo que es lo que precisamente tratamos de conseguir.²

El problema de hallar el diámetro $D_{opt} = \sqrt{A_{opt}}$ se reduce, pues, a determinar la raíz superior positiva de la ecuación de 3.º grado [A.3-2] que se plantea para cada valor de ρ_k y Q . De hecho, basta resolver el problema un número muy reducido de veces con 3 o 4 valores arbitrarios de ρ_k y uno solo de Q en cada caso, ya que las restantes soluciones en función de Q se deducen, por simple proporción de radicales, como vamos a ver inmediatamente (Apéndice 4).

Si se dibujan las gráficas en papel logarítmico, como se ha hecho en las figuras 2.6, 2.7 y 2.8, las curvas D , L y a óptimas se transforman en rectas y bastan dos puntos para trazar cada una de ellas, aunque el segundo, repetimos, no precisa de cálculos adicionales.

3.4. Apéndice 4

Cálculo de las gráficas universales de optimación del diámetro del núcleo, figura 2.6

3.4.1. Ecuación numérica del diámetro óptimo

Tomemos la ecuación de 3.º grado en A [2.6-7],

$$A^3 + AA^2 + BA - C = 0 \quad [A.4-1]$$

cuyas raíces (A óptima) tratamos de investigar teniendo en cuenta [2.6-8] a [2.6-10], que

$$A = \left(\frac{\rho_k}{f_y}\right) \left(\frac{f_y}{4} - \frac{16}{3 \rho_k f_y} - \frac{4}{3}\right) Q$$

$$B = \left(\frac{\rho_k}{f_y}\right)^2 \left(\frac{8}{3 \rho_k} - \frac{f_y}{3} + \frac{4}{9}\right) Q^2$$

$$C = \left(\frac{\rho_k}{f_y}\right)^3 f_y \left(\frac{1}{3 \rho_k} - \frac{1}{9}\right) Q^3$$

Las soluciones vamos a establecerlas *para un valor único de $f_y = 5,6$* intermedio entre los escasos márgenes que lo acotan (véase fig. 2.3). Los

¹ No es difícil plantear la ecuación primitiva [A.1-2] en función de A o de A^4 , teniendo en cuenta también [A.2-4], aunque, para seguir de cerca la evolución física, hayamos recurrido aquí a la introducción de A más tarde, directamente sobre la derivada, como expresión más simple.

² Sin necesidad de ulteriores derivaciones matemáticas se comprende lo que acabamos de decir por el curso mismo de toda función de 4.º grado cuyas ramas extremas se extienden hacia el infinito positivo, figura A.1.

resultados pueden considerarse así prácticamente válidos en todos los problemas que puedan presentarse.

Entonces,

$$A = \frac{\rho_k}{5,6} \left(\frac{5,6}{4} - \frac{16}{3 \cdot \rho_k \cdot 5,6} - \frac{4}{3}\right) Q = (0,0119 \rho_k - 0,170) Q \quad [A.4-2]$$

$$B = \left(\frac{\rho_k}{5,6}\right)^2 \left(\frac{8}{3 \rho_k} - \frac{5,6}{3} + \frac{4}{9}\right) Q^2 = \rho_k (0,085 - 0,0453 \rho_k) Q^2 \quad [A.4-3]$$

$$C = \left(\frac{\rho_k}{5,6}\right)^3 (5,6) \left(\frac{1}{3 \rho_k} - \frac{1}{9}\right) Q^3 = \rho_k^2 (0,01063 - 0,003544 \rho_k) Q^3 \quad [A.4-4]$$

Nos basta, pues, asignar al parámetro ρ_k el valor que interese para que los tres coeficientes de la cúbica [A.4-1] queden perfectamente definidos en función de cualquier Q .

3.4.2. Gráfica para distintos valores de ρ_k

Calculemos primero las raíces de [A.4-1] con $\rho_k = 3$,

$$A = (0,0119 \cdot 3 - 0,170) Q = -0,1343 Q$$

$$B = 3(0,085 - 0,0453 \cdot 3) Q^2 = -0,1527 Q^2$$

$$C = 9(0,01063 - 0,003544 \cdot 3) Q^3 = 0 \cdot Q^3 = 0$$

La ecuación [A.4-1] queda, pues, en

$$A^3 - (0,1343 Q) A^2 - (0,1527 Q^2) A + 0 = 0$$

y en este caso particular se reduce a la de 2.º grado.

$$A^2 - (0,1343 Q) A - 0,1527 Q^2 = 0$$

cuyas raíces, fáciles de hallar, vienen dadas por

$$A = \frac{0,1343 Q \pm \sqrt{0,1343^2 Q^2 + 4 \cdot 0,1527 Q^2}}{2} =$$

$$= \begin{cases} (0,0671 + 0,3965) Q = \boxed{0,4636 Q} \\ (0,0671 - 0,3965) Q < 0 \end{cases}$$

La curva del diámetro óptimo proporcional a la raíz cuarta de Q , para $\rho_k = 3$ es, así,

$$D_{opt} = \sqrt[4]{A} = \sqrt[4]{0,4636 \sqrt[4]{Q}} = \boxed{0,825 \sqrt[4]{Q}} \quad [A.4-5]$$

puede trazarse inmediatamente. En coordenadas logarítmicas es una recta, figura 2.6, tal que

para $Q = 10^4 \text{ cm}^4$ $D = 10 \cdot 0,825 = 8,25 \text{ cm}$

para $Q = 10^8 \text{ cm}^4$ $D = 100 \cdot 0,825 = 82,5 \text{ cm}$

Rehagamos los cálculos para $\rho_k = 5$.

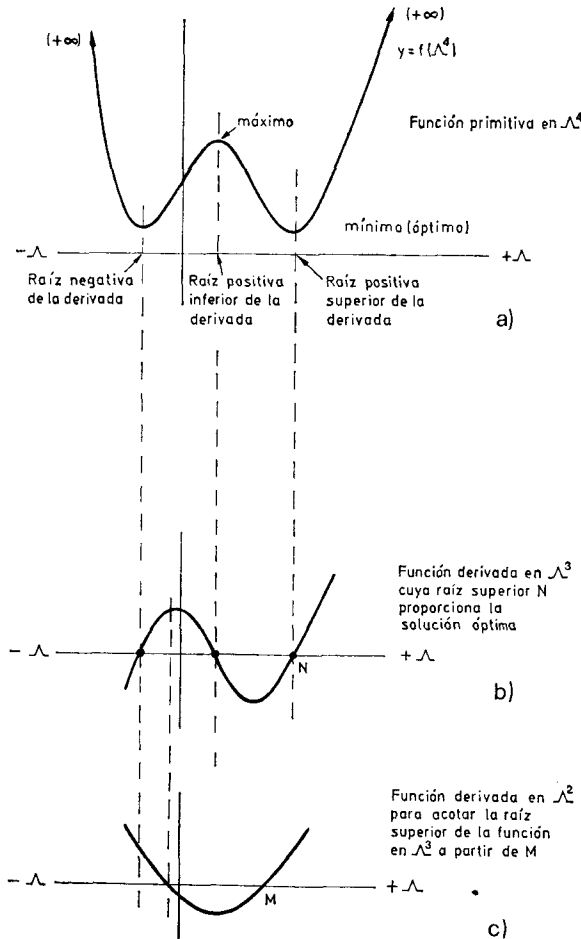


Fig. A-1. Curso de las curvas de optimación.

Tenemos [A.4-2] a [A.4-4],

$$A = (0,0119 \rho_k - 0,170) Q = (0,0119 \cdot 5 - 0,170) Q = -0,1105 Q$$

$$B = \rho_k (0,085 - 0,0453 \rho_k) Q^2 = 5(0,085 - 0,0453 \cdot 5) Q^2 = -0,7075 Q^2$$

$$C = \rho_k^2 (0,01063 - 0,003544 \rho_k) Q^3 = 25(0,01063 - 0,003544 \cdot 5) Q^3 = -0,1772 Q^3$$

y para la ecuación [A.4-1],

$$A^3 - (0,1105 Q) A^2 - (0,7075 Q^2) A + 0,1772 Q^3 = 0$$

El hallar las raíces de esta ecuación de 3.º grado al ir dando a Q toda la serie de valores prácticos posibles (entre 10^3 y 10^8 cm^4 , por ejemplo) puede parecer que entraña una labor ingente. Sin embargo, nada más lejos de la realidad.

En efecto, basta observar que al multiplicar Q por 10^4 las raíces en cuestión se multiplican también simplemente por 10^4 , puesto que si a Q_1 le corresponde la raíz A_1 , es decir, si se cumple

$$A_1^3 - (0,1105 Q_1) A_1^2 - (0,7075 Q_1^2) A_1 + 0,1772 Q_1^3 = 0 \quad [A.4-6]$$

y multiplicamos Q por 10^4 la nueva raíz A_2 deberá satisfacer a

$$A_2^3 - (0,1105 \cdot Q_1 \cdot 10^4) A_2^2 - (0,7075 \cdot Q_1^2 \cdot 10^8) A_2 + 0,1772 Q_1^3 \cdot 10^{12} = 0$$

lo cual ocurre evidentemente si hacemos $A_2 = 10^4 A_1$, ya que entonces

$$A_1^3 \cdot 10^{12} - (0,1105 \cdot Q_1 \cdot 10^4) A_1^2 \cdot 10^8 - (0,7075 Q_1^2 \cdot 10^8) A_1 \cdot 10^4 + 0,1772 Q_1^3 \cdot 10^{12} = 0$$

y con dividir por 10^{12} todos los términos se recae en la ecuación [A.4-6] de partida.

Nótese que ello equivale a decir que si $D_1 = \sqrt[4]{A_1}$ era el diámetro óptimo correspondiente a Q_1 , $D_2 = \sqrt[4]{10^4 A_1} = 10 D_1$ será el diámetro óptimo para $Q_2 = 10^4 Q_1$. Los diámetros favorables crecen, pues, como la raíz cuarta de las cuárticas dimensionales del transformador (y aproximadamente, pues, como la raíz cuarta de su potencia nominal),

$$D_{opt} = K_D \sqrt[4]{Q} \quad [A.4-7]$$

Proclamado este principio, será suficiente hallar, por lo que hemos dicho antes, la raíz positiva superior de la ecuación (A.4-5) de 3.º grado en A y

por tanto del diámetro óptimo $D = \sqrt[4]{A}$, con un valor conveniente de Q .

Multiplicando después Q por 10^4 tenemos, sin más, otro valor del diámetro óptimo igual a 10 veces el primero y con ello queda determinada, por

una recta, en coordenadas logarítmicas, toda la función del diámetro óptimo

$$D = f(Q) \text{ para } \rho_k = 5$$

Demos pues a Q en [A.4-6] el único valor $Q = 1$. Se trata de hallar entonces la raíz superior de

$$A^3 - 0,1105 A^2 - 0,7075 A + 0,1772 = 0 \quad [A.4-8]$$

Así pues,

$$\text{con } \rho_k = 5 \text{ y } Q = 1, A_{\text{opt}} = 0,74$$

$$D_{\text{opt}} = \sqrt[5]{0,74} = 0,927$$

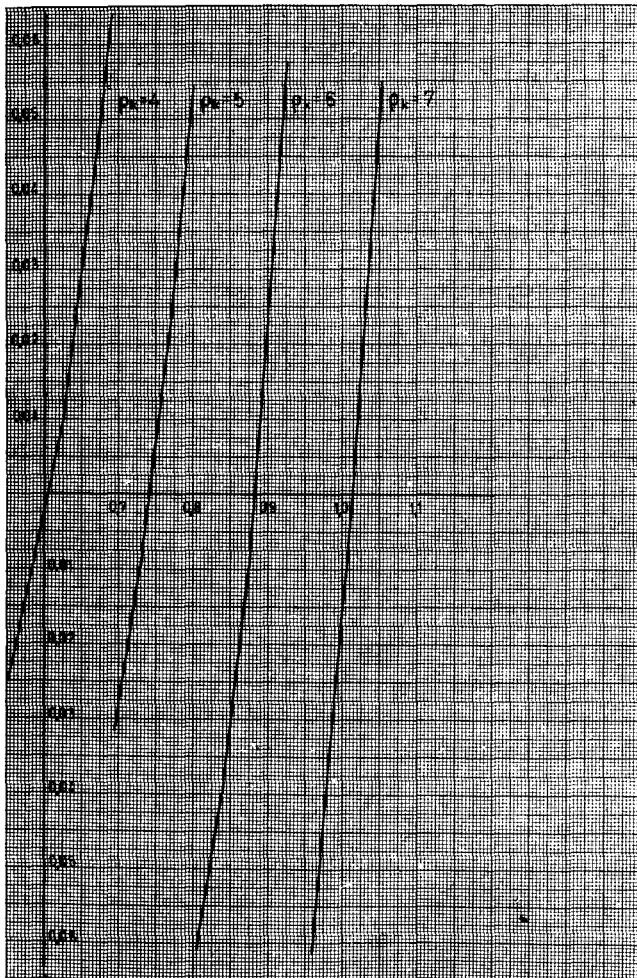


Fig. A-2. Soluciones gráficas de la ecuación cúbica en A_{opt} .

y, por tanto, de [A.4-7],

$$D = K_D \sqrt[5]{Q}, \quad K_D = \frac{D}{\sqrt[5]{Q}} = \frac{0,927}{\sqrt[5]{1}} = 0,927$$

$$D = 0,927 \sqrt[5]{Q}$$

Para

$$Q = 10^4 \text{ cm}^4, \quad D = 0,927 \sqrt[5]{10^4} = 9,27 \text{ cm}$$

$$Q = 10^8 \text{ cm}^4, \quad D = 0,927 \sqrt[5]{10^8} = 92,7 \text{ cm}$$

En la figura 2.6 aparece asimismo esta curva transformada en recta, por anamorfosis, a escalas logarítmicas.

Si tomamos $\rho_k = 3, 4, 7, \dots$, los coeficientes A, B y C pasan a ser distintos según [A.4-2] a [A.4-4], pero repitiendo el mismo proceso de acotación de las raíces, introducción provisional de $Q = 1$ y trazado gráfico para situar las soluciones, algunas de las cuales aparecen en la figura A-2, se deducen, finalmente, las rectas de la figura 2.6 que responden respectivamente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \text{para } \rho_k = 3 \quad D_{\text{opt}} &= 0,820 \sqrt[3]{Q} \\ &= 0,881 \sqrt[4]{Q} \\ &= 0,927 \sqrt[5]{Q} \\ &= 0,962 \sqrt[6]{Q} \\ &= 1,0 \sqrt[7]{Q} \end{aligned} \quad [A.4-9]$$

	$\rho_k = 5$	$Q = 1$			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	$f(A^3) =$
A	A^2	A^3	$0,7075 A$	$0,1105 A^2$	$(3) - (5) - (4) + 0,1772$
0,70	0,49	0,343	0,49525	0,05415	- 0,02895
0,72	0,5181	0,3732	0,5090	0,05725	- 0,01585
0,74	0,5476	0,4052	0,5230	0,06050	- 0,00110
0,76	0,5776	0,4390	0,5365	0,06380	+ 0,01590
0,78	0,6048	0,4746	0,5515	0,06720	+ 0,03310
0,80	0,64	0,5120	0,5660	0,07070	+ 0,05250

La figura A.2, muestra el trazado de la curva $f(A^3)$ que pasa casi exactamente por cero para $A = 0,74$.

3.5. Apéndice 5

Cálculo de las gráficas universales de optimación de la longitud de ventana L

En la ecuación [2.6-4] o [A.1-3] quedó bien de manifiesto que el valor de L conducente al mínimo precio de factura ν era

$$L^2 = \frac{4}{3} \frac{Q}{D^2} + \frac{1}{3} \rho_k \frac{Q^2}{D^6} \quad [A.5-1]$$

Como quiera que el diámetro óptimo hemos visto que puede adoptar la expresión final [A.4-7]

$$D = K_D \sqrt[4]{Q}$$

con los valores de K_D expuestos en los segundos miembros de [A.4-9], según los del parámetro ρ_k , tendremos

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{4}{3} \frac{Q}{K_D^2 Q^{1/2}} + \frac{1}{3} \rho_k \frac{Q^2}{K_D^6 D^{3/2}} \\ &= \left(\frac{4}{3 K_D^2} + \frac{\rho_k}{3 K_D^6} \right) Q^{3/2} \end{aligned}$$

o bien

$$L = K_L \sqrt[4]{Q} \quad [A.5-2]$$

con

$$K_L = \sqrt{\frac{4}{3 K_D^2} + \frac{\rho_k}{3 K_D^6}} = \frac{2}{\sqrt{3} K_D} \sqrt{1 + \frac{\rho_k}{4 K_D^4}} \quad [A.5-3]$$

Sustituyendo los valores de K_D , tomados de [A.4-9], resulta. Para

$$\left. \begin{aligned} \rho_k = 3 \quad K_D = 0,820 \quad K_L &= \frac{2}{\sqrt{3} \cdot 0,820} \sqrt{1 + \frac{3}{4 \cdot 0,820^4}} = 2,27 \\ \rho_k = 4 \quad K_D = 0,881 \quad K_L &= \frac{2}{\sqrt{3} \cdot 0,881} \sqrt{1 + \frac{4}{4 \cdot 0,881^4}} = 2,14 \\ \rho_k = 5 \quad K_D = 0,927 \quad K_L &= \frac{2}{\sqrt{3} \cdot 0,927} \sqrt{1 + \frac{5}{4 \cdot 0,927^4}} = 2,04 \\ \rho_k = 6 \quad K_D = 0,962 \quad K_L &= \frac{2}{\sqrt{3} \cdot 0,962} \sqrt{1 + \frac{6}{4 \cdot 0,962^4}} = 1,96 \\ \rho_k = 7 \quad K_D = 1 \quad K_L &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{7}{4 \cdot 1^4}} = 1,91 \end{aligned} \right\} [A.5-4]$$

Las rectas de la figura 2.7 se han trazado, pues, con los siguientes valores.

$$\left. \begin{aligned} \rho_k = 3 \quad \left\{ \begin{aligned} Q = 10^4 \text{ cm}^4 \quad L &= 2,27 \sqrt[4]{10^4} = 22,7 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 \quad L &= 2,27 \sqrt[4]{10^8} = 227 \text{ cm} \end{aligned} \right. \\ \rho_k = 4 \quad \left\{ \begin{aligned} Q = 10^4 \text{ cm}^4 \quad L &= 2,14 \sqrt[4]{10^4} = 21,4 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 \quad L &= 2,14 \sqrt[4]{10^8} = 214 \text{ cm} \end{aligned} \right. \\ \rho_k = 5 \quad \left\{ \begin{aligned} Q = 10^4 \text{ cm}^4 \quad L &= 2,04 \sqrt[4]{10^4} = 20,4 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 \quad L &= 2,04 \sqrt[4]{10^8} = 204 \text{ cm} \end{aligned} \right. \\ \rho_k = 6 \quad \left\{ \begin{aligned} Q = 10^4 \text{ cm}^4 \quad L &= 1,96 \sqrt[4]{10^4} = 19,6 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 \quad L &= 1,96 \sqrt[4]{10^8} = 196 \text{ cm} \end{aligned} \right. \\ \rho_k = 7 \quad \left\{ \begin{aligned} Q = 10^4 \text{ cm}^4 \quad L &= 1,91 \sqrt[4]{10^4} = 19,1 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 \quad L &= 1,91 \sqrt[4]{10^8} = 191 \text{ cm} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} [A.5-5]$$

3.6. Apéndice 6

Cálculo de los gráficos de optimación de la anchura de ventana «a»

Dado que [2.5-19],

$$Q = D^2 La \quad [A.6-1]$$

es

$$a = \frac{Q}{D^2 L} = \frac{Q}{K_D^2 Q^{3/2} K_L Q^{1/2}} = K_a \sqrt[4]{Q}, \text{ con } K_a = \frac{1}{K_D^2 K_L} \quad [A.6-2]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Para } \rho_k = 3 \quad K_D = 0,820 \quad K_L = 2,27 \quad K_a &= \frac{1}{0,820^2 \cdot 2,27} = 0,647 \\ \text{Para } \rho_k = 4 \quad K_D = 0,881 \quad K_L = 2,14 \quad K_a &= \frac{1}{0,881^2 \cdot 2,14} = 0,602 \\ \text{Para } \rho_k = 5 \quad K_D = 0,927 \quad K_L = 2,04 \quad K_a &= \frac{1}{0,927^2 \cdot 2,04} = 0,57 \\ \text{Para } \rho_k = 6 \quad K_D = 0,962 \quad K_L = 1,96 \quad K_a &= \frac{1}{0,962^2 \cdot 1,96} = 0,524 \\ \text{Para } \rho_k = 7 \quad K_D = 1 \quad K_L = 1,91 \quad K_a &= \frac{1}{1^2 \cdot 1,91} = 0,523 \end{aligned} \right\} [A.6-3]$$

Las rectas de la figura 2.8 se determinan por los siguientes puntos.

$$\rho_k = 3 \begin{cases} Q = 10^4 \text{ cm}^4 & a = 0,647 \sqrt[4]{10^4} = 6,47 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 & a = 0,647 \sqrt[4]{10^8} = 64,7 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\rho_k = 4 \begin{cases} Q = 10^4 \text{ cm}^4 & a = 0,602 \sqrt[4]{10^4} = 6,02 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 & a = 0,602 \sqrt[4]{10^8} = 60,2 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\rho_k = 5 \begin{cases} Q = 10^4 \text{ cm}^4 & a = 0,57 \sqrt[4]{10^4} = 5,7 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 & a = 0,57 \sqrt[4]{10^8} = 57 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\rho_k = 6 \begin{cases} Q = 10^4 \text{ cm}^4 & a = 0,542 \sqrt[4]{10^4} = 5,42 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 & a = 0,542 \sqrt[4]{10^8} = 54,2 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\rho_k = 7 \begin{cases} Q = 10^4 \text{ cm}^4 & a = 0,523 \sqrt[4]{10^4} = 5,23 \text{ cm} \\ Q = 10^8 \text{ cm}^4 & a = 0,523 \sqrt[4]{10^8} = 52,3 \text{ cm} \end{cases}$$

Nótese que para cada valor de ρ_k las relaciones entre las tres dimensiones óptimas permanece constante, independiente incluso de Q . En cifras relativas asignándole 1 al diámetro se tiene

ρ_k	D	L	a	L/a
3	1	2,75	0,785	3,5
4	1	2,43	0,684	3,56
5	1	2,20	0,615	3,58
6	1	2,02	0,56	3,61
7	1	1,91	0,523	3,65

La altura y la anchura de la ventana disminuyen con respecto al diámetro a medida que ρ_k aumenta, es decir, a medida que sube la influencia del cobre sobre el costo, lo cual es natural. Las proporciones de la ventana misma se mantienen en cambio casi invariables en la relación $\frac{L}{a} \approx 3,6$.

3.7. Apéndice 7

Cálculo de las curvas de dimensiones óptimas según la potencia del transformador. (Indicadoras)

Como índice de orientación se han calculado estas curvas en función de la potencia P en vez de la cuártica Q para un tipo de transformadores cuyos

coeficientes de trabajo fuesen:

Inducción máxima en el núcleo, $B = 17 \text{ kG}$

Densidad media de corriente, $J = 3 \text{ A/mm}^2$

Factor de utilización rectangular de la chapa, $f_{Fe} = 2/3$

Factor de utilización de la ventana, $f_{Cu} = 1/3$

Frecuencia, $f = 50 \text{ Hz}$

En estas condiciones [2.5-20],

$$C_s = \frac{f_{Fe} f_{Cu} f}{300 \cdot 10^3} (BJ) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 50}{300 \cdot 10^3} (17 \cdot 3) = 1,89 \cdot 10^{-3} \text{ kVA/cm}^4$$

y, por tanto,

$$S = C_s Q = 1,89 \cdot 10^{-3} Q \text{ kVA}$$

Hemos tomado de las figuras 2.6, 2.7 y 2.8 la gráfica intermedia correspondiente a $\rho_k = 5$ multiplicando simplemente los valores de Q por $1,89 \cdot 10^{-3}$ para convertirlos en potencia. Así,

$\rho_k = 5$	Q	S	(cm)		
			D	L	a
5	$Q = 10^4 \text{ cm}^4$	$S = 1,89 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 = 18,9 \text{ kVA}$	9,27	20,4	5,7
	$Q = 10^8 \text{ cm}^4$	$S = 1,89 \cdot 10^{-3} \cdot 10^8 = 189 \text{ 000 kVA}$	92,7	204	57

Con los datos de las cuatro últimas columnas se han dibujado las tres rectas de optimación $D = f(S)$, $L = f(S)$ y $a = f(S)$ de la figura 2.9.

Bibliografía

- BEAN, CHACKAN, MOORE y WENTZ: *Transformers*. McGraw-Hill, Book Co., Inc., Nueva York, 1959.
- BRIDGMAN: *Dimensional Analysis*. Yale University Press.
- CORRALES: *La Máquina Eléctrica*. Tomo I, Labor, 1969.
- CORRALES: *Teoría, Cálculo y Construcción de Transformadores*. 5.^a ed., Labor, 1968.
- DUFFIN, PETERSON y ZENER: *Geometric Programming*. John Wiley and Sons.
- GRANT: *Principles of Engineering Economy*. The Rowand Press.
- STIGANT & LACEY: *P & P Transformer Book*. 9.^a-ed., 1965.
- WIDMAR: *Die Transformatoren*. Springer.
- WILDE: *Optimum Seeking Methods*. Prentice-Hall.
- WILDE y BEIGHTLER: *Foundation of Optimisation*. Prentice-Hall
- BREAKEYEN: *Load Curves Indicate Economical Transformer Sizes*. Electrical World, Marzo 1955
- FAVEZ: *La Détermination des optimums technico-Economiques*. Rev. Gen. Electr, Octubre 1965, T. 74, págs. 812-822.
- JEYNS y BALDWIN: *Financial Concepts for Economic Studies*. Westinghouse Engineer, Enero 1964, págs. 8-14.
- ID.: *Financial Mathematics for Economic Studies*. Westinghouse Engineer, Marzo 1964.
- LAWLIAC: *L'optimisation des Circuits Magnetiques et leur bobinages*. Memoria a la S.F.E., Noviembre 1964.
- MURPHY: *General Considerations in Evaluating the cort of Electrical Losses*. I.E.E.C., CP-513.
- VIDMAR: *Le Problème Economique dans la construction de Transformateurs*. Rapp. n.° 17, 3.^{ème} Section, Congrès International d'Electricité, Paris, 1932.